CHAPITRE 4

TABLES DE MORTALITE

Sommaire

0. Rappels
1. Hypothèses
2. Construction de la table brute
3. Ajustement de Makeham
4. En pratique
5. Tables prospectives

4. Tables de mortalité

0. <u>Rappels</u>
    - Régression linéaire
    - Régression non linéaire
1. Hypothèses
2. Construction de la table brute
3. Ajustement de Makeham
4. En pratique
5. Tables prospectives

Régression linéaire

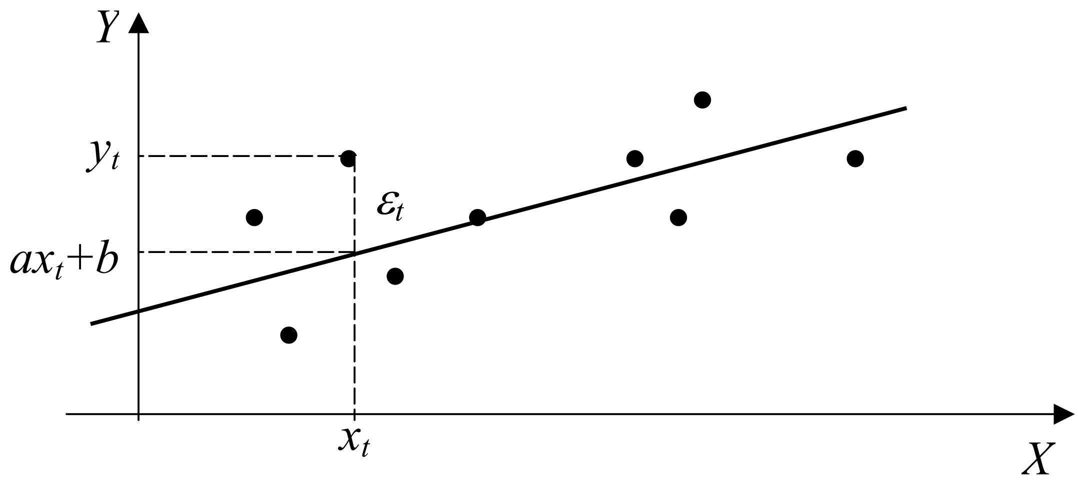
Deux variables X et Y liées par une relation linéaire

$$Y = aX + b$$

Observations pour les deux variables

$$(x_t, y_t) \qquad t = 1, \ldots, T$$

Objectif : trouver la droite (c-à-d les coefficients a et b) qui s'ajuste « au mieux » aux observations



Méthode des moindres carrés

$$\min_{(a,b)} \qquad \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^{T} \left[y_t - (ax_t + b) \right]^2$$

Généralisation : régression multiple

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_m X_m$$

Régression non linéaire

Relation non linéaire

$$Y = f(X_1, \ldots, X_m ; \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$$

Ex 1 : linéarisable

$$Y = \alpha X^{\beta}$$

$$\ln Y = \ln \alpha + \beta \ln X$$

Ex 2 : non linéarisable

$$Y = \alpha + X^{\beta}$$

→ techniques numériques, souvent itératives

4. Tables de mortalité

0. Rappels
1. <u>Hypothèses</u>
2. Construction de la table brute
3. Ajustement de Makeham
4. En pratique
5. Tables prospectives

Hypothèses

(H1) La v.a. V a la même loi de probabilité pour tous les individus de la population

Une seule différence : entre hommes et femmes

(H2) Table statique : la mortalité dans t années d'un individu d'âge x aujourd'hui est la même que la mortalité actuelle d'un individu d'âge $(x + t)$

Cette hypothèses n'est pas correcte, mais

1. les adaptations du législateur participent à la correction
2. on revoit les tables de mortalité périodiquement (15 à 20 ans)
3. des tables prospectives (dynamiques) font l'objet de recherches

(H3) Les taux d'intérêt sont constants à long terme (dans notre cas, $i = 4{,}5$ %)

Cette hypothèse n'est utile que pour les opérations d'assurance seulement, pas pour le calcul des probabilités viagères

4. Tables de mortalité

0. Rappels
1. Hypothèses
2. <u>Construction de la table brute</u>
    - Introduction
    - Diagramme de Lexis
    - Adaptations
3. Ajustement de Makeham
4. En pratique
5. Tables prospectives

Introduction

Table de survie = valeurs annuelles de l_x

Construites par les autorités (*tables démographiques*) ou par les compagnies (*tables actuarielles*)

Différenciation suivant le sexe

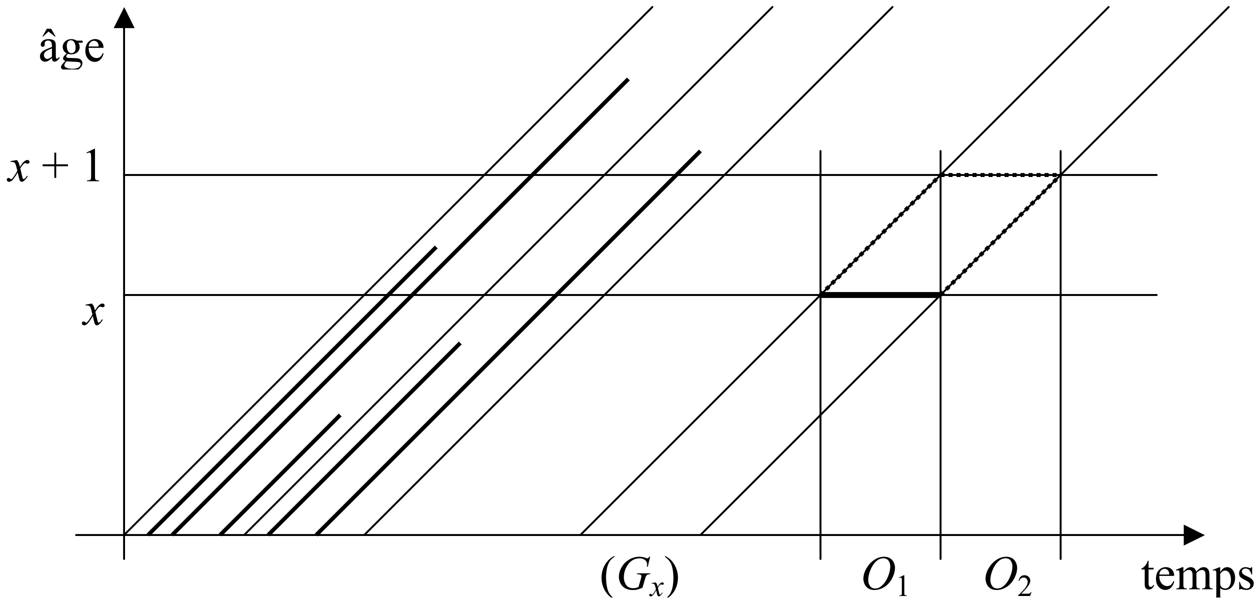
Il faudrait plus de 100 ans pour disposer d'observations homogènes (une même génération)

→ impensable et données dépassées
→ observations pendant quelques années seulement (mais toutes les générations)

Cette table sera donc irrégulière

- échantillonnage
- fonction des effectifs des différentes générations

Diagramme de Lexis



Chaque individu a une ligne de vie

Année(s) d'observations : O_1 (et O_2) = recensements

Pour chaque tranche d'âge x

Génération (G_x) : tous les individus qui ont (ou auraient eu) leur x-ème anniversaire pendant O_1

L_x = nb d'individus de (G_x) vivants à leur x-ème anniversaire
= nombre de lignes de vie coupant le segment

D_x = nb d'individus de (G_x) décédant entre les âges x et $(x+1)$
= nb de lignes de vie se terminant dans le parallélogramme (→ besoin de O_2)

$Q_x = D_x / L_x$ = estimation du taux annuel de décès

Adaptations

N.B. : fraction D_x / L_x

→ dépendance vis-à-vis de la taille de (G_x) « gommée »

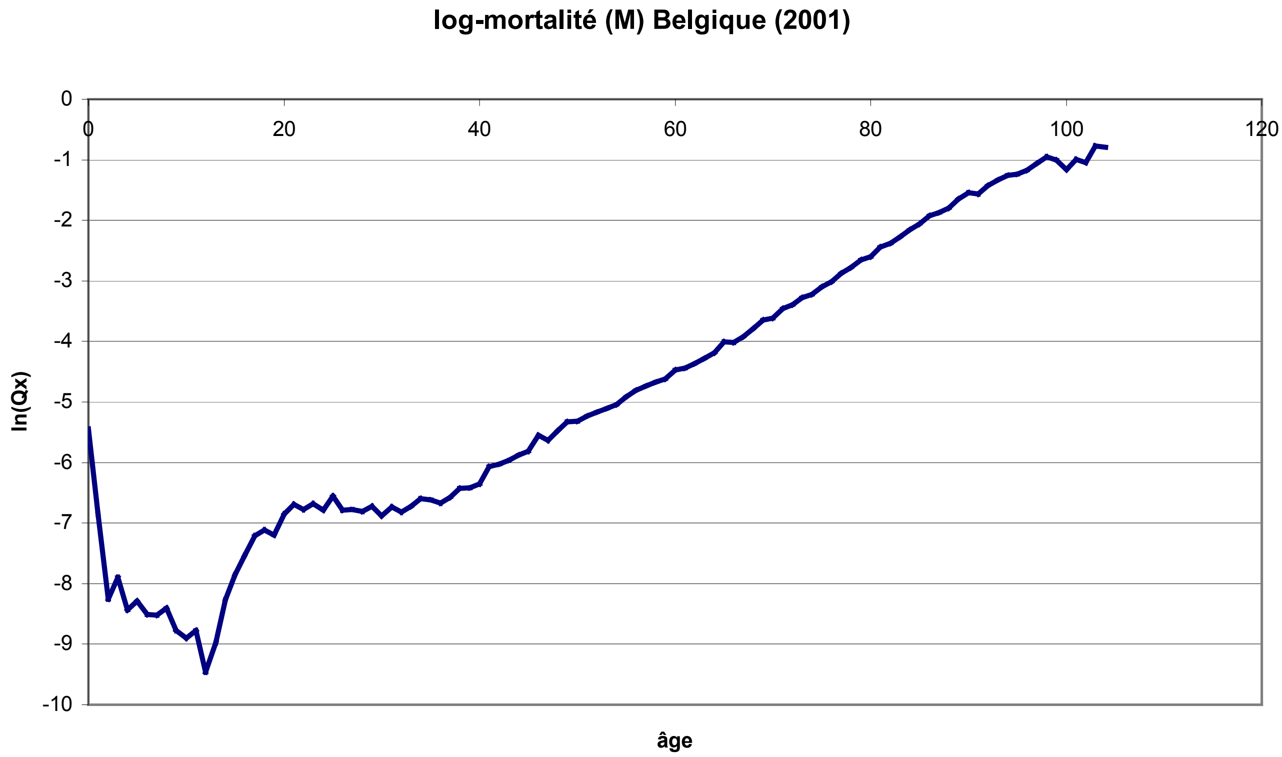
Si population fermée

- pas d'entrée dans (G_x) pendant les années d'observation
- les seules sorties sont dues à la mortalité

→ On peut utiliser Q_x tel quel

En pratique, population ouverte

- tenir compte des entrées (immigration – nouveaux contrats)
- tenir compte des sorties (émigration – fins de contrats)
- pour L_x, tenir compte de la proportion d'année concernant les entrées et sorties


log-mortalité (M) Belgique (2001)
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
0
20
40
60
80
100
120
ln(Qx)
âge

4. Tables de mortalité

0. Rappels
1. Hypothèses
2. Construction de la table brute
3. <u>Ajustement de Makeham</u>
   - Hypothèse de Makeham
   - Fonction de survie
   - Ajustement
4. En pratique
5. Tables prospectives

Hypothèse de Makeham

Le taux instantané de mortalité est constitué de 2 composantes

- accidentelle (indépendante de l'âge)
- vieillissement (fonction exponentielle de l'âge)

Cette hypothèse est cohérente avec les observations disponibles

$$\mu_x = a + b \cdot c^x$$

avec $a > 0$, $b > 0$, $c > 1$

N.B. : (1) a seul : modèle « accident »
(2) $b \cdot c^x$ seul : modèle de Gompertz

Fonction de survie

$$\mu_x = -(\ln l_x)' = a + b \cdot c^x$$

$$\ln l_x = -\int (a + b \cdot c^x) dx$$

$$= K - ax - \frac{b}{\ln c} c^x$$

$$l_x = e^K \cdot e^{-ax} \cdot e^{-(b/\ln c)c^x}$$

$$= k \cdot \left(e^{-a}\right)^x \cdot \left(e^{-(b/\ln c)}\right)^{(c^x)}$$

$$= k \cdot s^x \cdot g^{(c^x)}$$

avec

$$s = e^{-a}$$

$$g = e^{-(b/\ln c)}$$

Valeur de k ?

telle que $l_0 = k \cdot g$

→ seulement s, g et c à estimer

Ajustement

Table brute (← observations) : Q_x

Lissage sur 4 ans (→ 5 années d'observation)
exemple : 1985-1989

Construction des

$$P_x = 1 - Q_x$$

Modèle mathématique

$$l_x = k \cdot s^x \cdot g^{(c^x)}$$

Transformation du modèle

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{k \cdot s^{x+1} \cdot g^{(c^{x+1})}}{k \cdot s^x \cdot g^{(c^x)}} = s \cdot g^{c^x (c-1)}$$

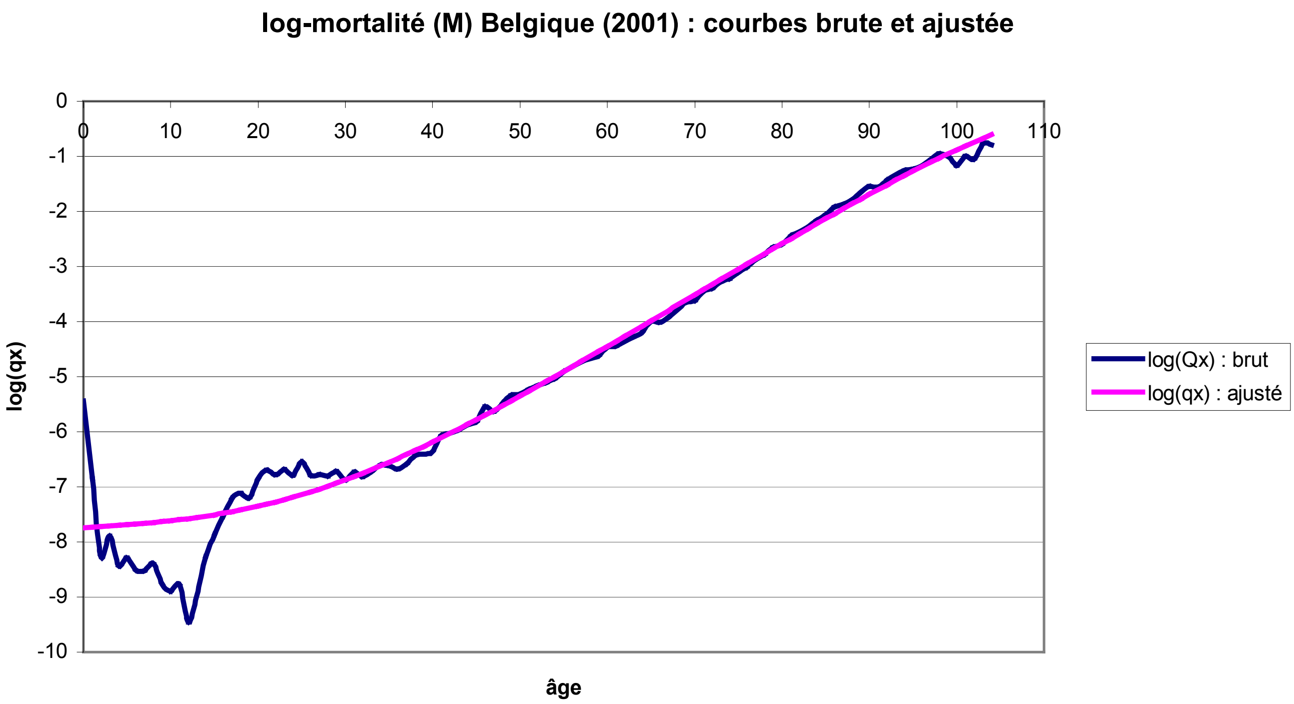
$$\ln p_x = \ln s + (c-1) \ln g \cdot c^x$$

Ajustement du modèle aux observations

= modèle de la famille

$$Y = \alpha + \beta \cdot \gamma^X$$

non linéarisable



log-mortalité (M) Belgique (2001) : courbes brute et ajustée
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
log(qx)
âge
log(Qx) : brut
log(qx) : ajusté

4. Tables de mortalité

0. Rappels
1. Hypothèses
2. Construction de la table brute
3. Ajustement de Makeham
4. <u>En pratique</u>
    - Tranche d'âge pour l'estimation
    - Vie et décès
5. Tables prospectives

Tranche d'âge pour l'estimation

Bonne qualité d'ajustement du modèle de Makeham (observations – modèle) pour la tranche d'âge postérieure à 25 ans

Avant 25 ans (voir graphique log-Q_x)

- De 0 à 5 : mortalité infantile
- De 15 à 25 : suicides et accidents de la route

Cependant,

i. éviter la surtarification pour les jeunes clients
ii. peu concernés par l'assurance vie

→ période utilisée : [25 ; + ∞[

Vie et décès

Le législateur propose des adaptations (marges de sécurité) différenciées suivant le type d'opération (vie ou décès), dans l'intérêt (la sécurité) de l'assureur …

→ 2 tables vie (MR – FR)
→ 2 tables décès (MK – FK)

Coefficients réglementaires pour la fonction de survie l_x en Belgique :

	MK	MR	FK	FR
k	1000450,59	1000266,63	1000097,39	1000048,56
s	0,99910688	0,99944170	0,99925705	0,99966973
g	0,99954961	0,99973344	0,99990262	0,99995144
c	1,10379811	1,10107754	1,11823906	1,11679245

4. Tables de mortalité

0. Rappels
1. Hypothèses
2. Construction de la table brute
3. Ajustement de Makeham
4. En pratique
5. <u>Tables prospectives</u>
    - Motivation
    - Modélisation

Motivation

Remise en question de (H2) :

« Table statique : la mortalité dans t années d'un individu d'âge x aujourd'hui est la même que la mortalité actuelle d'un individu d'âge $(x + t)$ »

Evolution de q_{60} au fil du temps :

1880-1890	0,03362
1928-1932	0,02412
1959-1963	0,02304
1968-1972	0,02211
1988-1990	0,01498
1994-1996	0,01187
2001-2003	0,01127

Modélisation

Le taux instantané de mortalité dépend de l'âge x ainsi que du temps τ : $\mu_x(\tau)$

Hypothèse : amélioration exponentielle de la momrtalité au cours du temps :

$$\mu_x(\tau) = \left(a + b \cdot c^x\right) \cdot e^{-\beta\tau} \qquad (\beta > 0)$$

Probabilité qu'une tête d'âge x à l'instant τ survive au moins t années : ${}_t p_x(\tau)$

$$\begin{aligned} {}_t p_x(\tau) &= \exp\left[-\int_x^{x+t} \mu_s(\tau + s - x)\, ds\right] \\ &= \exp\left[-\int_x^{x+t} \left(a + b \cdot c^s\right) e^{-\beta(\tau+s-x)}\, ds\right] \\ &= \exp\left[-e^{-\beta(\tau-x)} \int_x^{x+t} \left(a + b \cdot c^s\right) e^{-\beta s}\, ds\right] \end{aligned}$$

et de même pour toutes les probabilités viagères

Estimation : requiert des techniques économétriques complexes