TROISIEME PARTIE

CALCUL ACTUARIEL « VIE »

CHAPITRE 3

PROBABILITES VIAGERES

Sommaire

3. Probabilités viagères

0. Rappels
    - Phénomène fortuit et événement
    - Probabilité
    - Probabilité conditionnelle
    - Indépendance
    - Variable aléatoire
    - Loi de probabilité et fonction de répartition
    - v.a. aléatoires discrètes et à densité
    - Moyenne d'une v.a.
1. Probabilités viagères sur 1 tête
2. Probabilités viagères sur 2 têtes
3. Fonction de survie
4. Taux instantané de mortalité
5. Espérance de survie
6. Capital différé

Phénomène fortuit et événement

Phénomène fortuit = dû au hasard :

- conditions initiales identiques
- variabilité des résultats (ensemble Ω)
    i. anarchie d'une réalisation à l'autre
    ii. régularité moyenne à long terme

Evénement : fait susceptible de se produire ou non
= partie de Ω

Si résultat ω, A se produit $\Leftrightarrow$ $\omega \in A$

Evénement *certain* = Ω
Evénement *impossible* = $\varnothing$

Interprétations ensemblistes

Opération logique	*Opération ensembliste*
Contraire de A	$\overline{A}$
A implique B	$A \subset B$
A et B	$A \cap B$
A ou B	$A \cup B$
A, mais pas B	$A \setminus B$
A et B incompatible	$A \cap B = \varnothing$

Probabilité

Définition : mesure, pour les événements, de la tendance à se produire

Axiomes de Kolmogorov

$$\forall A \subset \Omega, \quad \Pr(A) \geq 0$$
$$\forall A, B \subset \Omega, \quad A \cap B = \varnothing \;\Rightarrow\; \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$
$$\Pr(\Omega) = 1$$

Propriétés

$$\Pr(\varnothing) = 0$$
$$\forall A \subset \Omega \quad 0 \leq \Pr(A) \leq 1$$
$$\Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A)$$
$$\forall A, B \subset \Omega, \quad A \subset B \;\Rightarrow\; \Pr(A) \leq \Pr(B)$$

$$\forall A, B \subset \Omega, \quad \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

(formule de Boole)

Modèle fini équiprobable

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$$
$$\Pr(\{\omega_i\}) = 1/n \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Dans ce cas,

$$\Pr(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$$

= « nb cas favorables / nb cas possibles »

Probabilité conditionnelle

Probabilité de A si B (sachant que B se produit)

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

car - événement A → $A \cap \mathrm{B}$
- unité : $\Pr(B \mid B) = 1$

Formule des *probabilités totales*

Si $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est une partition de Ω,

$$\Pr(B) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i) \Pr(B \mid A_i)$$

Indépendance

A est *indépendant* de B si

$$\Pr(A \mid B) = \Pr(A \mid \overline{B})$$

Caractérisation

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$$

N.B. : En général (si non indépendance)

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B \mid A)$$

Généralisation : deux phénomènes fortuits $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ (aspects particuliers du ph. fort. $\mathcal{F}$) sont *indépendants* si tout événement de $\mathcal{G}$ est indépendant de tout événement de $\mathcal{H}$:

$$\Pr(G \cap H) = \Pr(G) \cdot \Pr(H)$$

Variable aléatoire (v.a.)

Définition : grandeur numérique dépendant du résultat d'un phénomène fortuit

Mathématiquement,

$$X : \left| \begin{array}{l} \Omega \to \mathbf{R} \\ \omega \mapsto X(\omega) \end{array} \right.$$

Parfois, utilisation des v.a. sans définir Ω
(ex. : durée de vie d'une personne)

Loi de probabilité et fonction de répartition (f.r.)

Loi de probabilité : probabilité de n'importe quel événement défini à partir de la v.a. :

$$\Pr[X \in E] \qquad \forall E \subset \mathbf{R}$$

Fonction de répartition

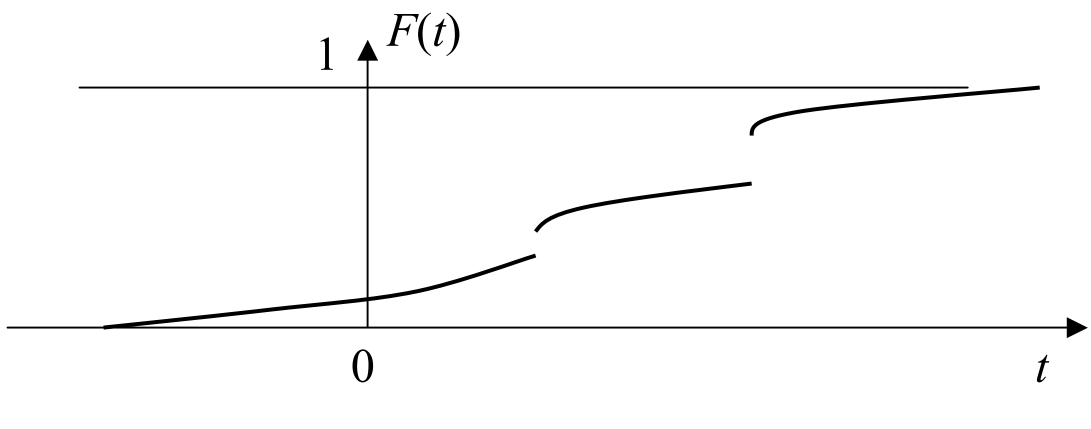
$$F_X : \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \to [0;1] \\ t \mapsto F_X(t) = \Pr[X \le t] \end{array} \right.$$

Propriétés

$$0 \le F(t) \le 1$$

$$F \text{ croissant}$$

$$\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0 \qquad \lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$$



$$\Pr[X > t] = 1 - F(t) \qquad \Pr[s < X \le t] = F(t) - F(s)$$

$$\Pr[X = t] = F(t) - F(t-) = \text{hauteur du saut}$$

N.B. : si $X > 0$, $F(t) = 0$ pour $t \le 0$

v.a. discrètes et à densité

Différentes manières de répartir la probabilité sur les valeurs possibles :

- masses sur des valeurs isolées
- densité sur des plages continues
- mixte

v.a. *discrète* : valeurs possibles dénombrables

$$X \propto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

$$p_i = \Pr[X = x_i] \qquad \sum_i p_i = 1$$

Propriété : f.r. en escaliers

v.a. *à densité* : fonction f positive telle que

$$\Pr[X \in E] = \int_E f(x)dx$$

Propriétés

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\Pr[X = t] = 0 \quad \forall t$$

$$\Pr[t < X \le t + h] \approx f(t) \cdot h$$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx \qquad f(t) = F'(t)$$

f.r.continue

Moyenne d'une variable aléatoire

Indicateur de localisation (notation : μ)

v.a. discrète : $\mu = \sum_i x_i p_i$

v.a. à densité : $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

En général, $\mu = \int_0^{+\infty} [1 - F(t)] dt - \int_{-\infty}^0 F(t) dt$

Espérance (*mathématique*)

$$E(X) = \mu$$

Propriété

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$$

Généralisation

$$E(g(X)) = \sum_i g(x_i) p_i = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

3. Probabilités viagères

0. Rappels
1. Probabilités viagères sur 1 tête
   - Durée de vie
   - Probabilité de survie et de décès
   - Probabilité de décès différé
2. Probabilités viagères sur 2 têtes
3. Fonction de survie
4. Taux instantané de mortalité
5. Espérance de survie
6. Capital différé

Durée de vie

On ne précise pas l'ensemble Ω.

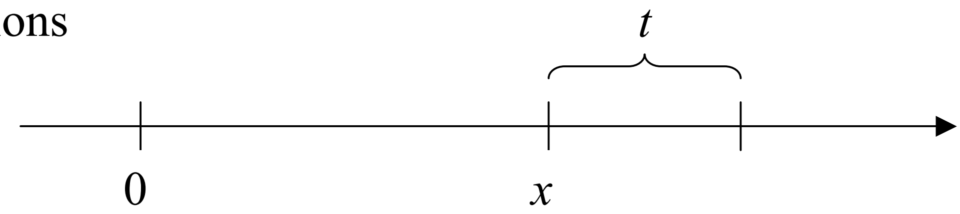
Variable aléatoire : V, durée de vie d'une personne (> 0)

Probabilités d'événements définis à partir de V :
probabilités viagères (survie et décès)

Calcul pratique de ces probabilités :
table de mortalité (chap. 4)

Probabilité de survie et de décès

Définitions



Probabilité qu'une tête d'age x survive au moins t années (notation ${}_t p_x$)

$$
\begin{aligned}
{}_t p_x &= \Pr([V > x+t] | [V > x]) \\
&= \frac{\Pr([V > x+t] \cap [V > x])}{\Pr[V > x]} \\
&= \frac{\Pr[V > x+t]}{\Pr[V > x]}
\end{aligned}
$$

Probabilité qu'une tête d'âge x décède dans un délai de t années (notation ${}_t q_x$)

$$
\begin{aligned}
{}_t q_x &= \Pr([V \le x+t] | [V > x]) \\
&= \frac{\Pr([V \le x+t] \cap [V > x])}{\Pr[V > x]} \\
&= \frac{\Pr[x < V \le x+t]}{\Pr[V > x]}
\end{aligned}
$$

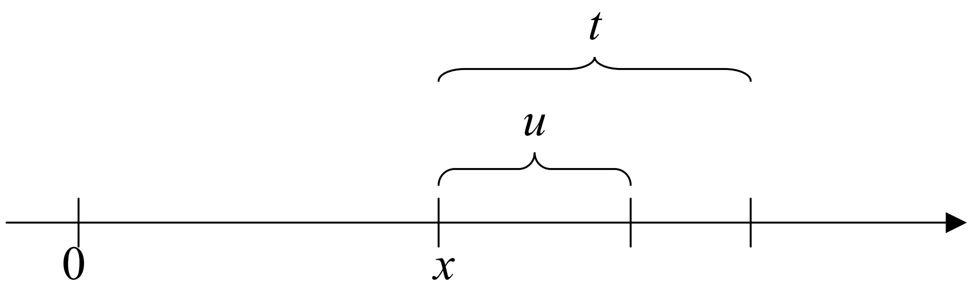
Cas particulier : $t = 1$

Taux annuel de survie : ${}_1 p_x = p_x$
Taux annuel de décès : ${}_1 q_x = q_x$

Propriétés

$$ {}_t p_x + {}_t q_x = 1 $$

$$ 0 < u < t \quad \Rightarrow \quad {}_t p_x = {}_u p_x \cdot {}_{t-u} p_{x+u} $$



$$ \begin{aligned} {}_u p_x \cdot {}_{t-u} p_{x+u} &= \frac{\Pr[V > x+u]}{\Pr[V > x]} \cdot \frac{\Pr[V > x+t]}{\Pr[V > x+u]} \\ &= \frac{\Pr[V > x+t]}{\Pr[V > x]} \\ &= {}_t p_x \end{aligned} $$

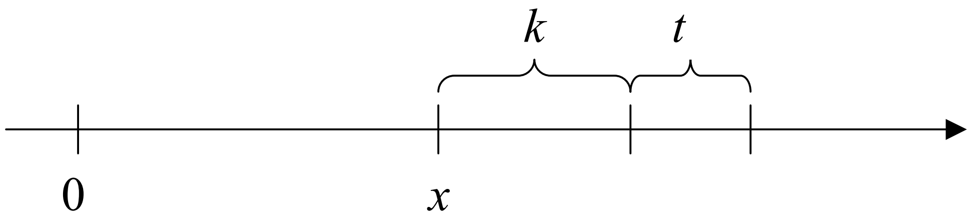
Cas particulier

$$ {}_t p_x = {}_1 p_x \cdot {}_{t-1} p_{x+1} = {}_1 p_x \cdot {}_1 p_{x+1} \cdot {}_{t-2} p_{x+2} = \ldots $$

Si t est entier, ${}_t p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot \ldots \cdot p_{x+t-1}$

Intérêt : probabilités viagères exprimées à partir d'une fonction d'une seule variable

Probabilité de décès différé



Définition

Probabilité qu'une tête d'âge x décède dans un délai de t années, différé de k (notation ${}_{k|t}q_x$)

$$
\begin{aligned}
{}_{k|t}q_x &= \Pr([x+k < V \le x+k+t] | [V > x]) \\
&= \frac{\Pr[x+k < V \le x+k+t]}{\Pr[V > x]}
\end{aligned}
$$

Propriété

$$
{}_{k|t}q_x = {}_kp_x \cdot {}_tq_{x+k} = {}_kp_x - {}_{k+t}p_x
$$

Dém.

$$
\begin{aligned}
{}_{k|t}q_x &= \frac{\Pr[x+k < V \le x+k+t]}{\Pr[V > x]} \left(\times \frac{\Pr[V > x+k]}{\Pr[V > x+k]} \right) \\
&= {}_kp_x \cdot {}_tq_{x+k} \\
&= {}_kp_x - {}_kp_x \cdot {}_tp_{x+k} \\
&= {}_kp_x - {}_{k+t}p_x
\end{aligned}
$$

3. Probabilités viagères

0. Rappels
1. Probabilités viagères sur 1 tête
2. <u>Probabilités viagères sur 2 têtes</u>
3. Fonction de survie
4. Taux instantané de mortalité
5. Espérance de survie
6. Capital différé

Probabilités viagères sur 2 têtes

Deux personnes (ayant éventuellement une distribution de V différente), mais indépendantes

Probabilités de survie

Probabilité que les 2 têtes, d'âge x et y, survivent au moins t années :

$${}_t p_{xy} = {}_t p_x \cdot {}_t \widetilde{p}_y$$

Probabilité qu'au moins une des 2 têtes, d'âge x et y, survive au moins t années :

$$\begin{aligned} {}_t p_{\overline{xy}} &= {}_t p_x \cdot (1 - {}_t \widetilde{p}_y) + (1 - {}_t p_x) \cdot {}_t \widetilde{p}_y + {}_t p_x \cdot {}_t \widetilde{p}_y \\ &= {}_t p_x + {}_t \widetilde{p}_y - {}_t p_x \cdot {}_t \widetilde{p}_y \end{aligned}$$

Autre approche : formule de Boole

Probabilité qu'exactement une des 2 têtes, d'âge x et y, survive au moins t années :

$$\begin{aligned} {}_t p_{\overline{xy}}^{[1]} &= {}_t p_x \cdot (1 - {}_t \widetilde{p}_y) + (1 - {}_t p_x) \cdot {}_t \widetilde{p}_y \\ &= {}_t p_x + {}_t \widetilde{p}_y - 2 {}_t p_x \cdot {}_t \widetilde{p}_y \end{aligned}$$

Probabilités de décès : complémentaires

$$ {}_t q_{xy} = 1 - {}_t p_{xy} $$

= probabilité qu'au moins une des 2 têtes, d'âge x et y, décède dans un délai de t années

$$ {}_t q_{\overline{xy}} = 1 - {}_t p_{\overline{xy}} $$

= probabilité que les 2 têtes, d'âge x et y, décèdent dans un délai de t années

3. Probabilités viagères

0. Rappels
1. Probabilités viagères sur 1 tête
2. Probabilités viagères sur 2 têtes
3. <u>Fonction de survie</u>
    - Définition
    - Lien avec les probabilités viagères
    - Tables de mortalité
4. Taux instantané de mortalité
5. Espérance de survie
6. Capital différé

Définition

Fonction l_x représentant l'évolution d'une population fictive d'individus

- nés à la même date
- ayant la même distribution de durée de vie
- indépendants

l_0 = effectif au départ (= 1 000 000)

l_x = nombre de survivants à l'âge x

$d_x = l_x - l_{x+1}$ = nombre de décès durant $]x\,;\,x+1]$

Propriété

$$\Pr[V > x] = \frac{l_x}{l_0}$$

(= nb cas favorables / nb cas possibles)

Lien avec les probabilités viagères

$$ {}_t p_x = \frac{\Pr[V > x+t]}{\Pr[V > x]} = \frac{l_{x+t} / l_0}{l_x / l_0} = \frac{l_{x+t}}{l_x} $$

$$ {}_t q_x = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} $$

$$ p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} $$

$$ q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x} $$

$$ {}_{k|t} q_x = \frac{\Pr[x+k < V \leq x+k+t]}{\Pr[V > x]} = \frac{l_{x+k} - l_{x+k+t}}{l_x} $$

Avantage sur « ${}_t p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot \ldots \cdot p_{x+t-1}$ »

- fonction d'une seule variable
- exprime les probabilités viagères à l'aide d'un petit nombre de facteurs

Tables de mortalité

Les tables de mortalité donnent la fonction de survie l_x pour des x entiers seulement (= table de survie)

→ définition des différentes notions
- de manière générale (x continu)
- utilisées à partir de la table de survie

Les tables de mortalité diffèrent
- suivant le sexe (M – F)
- suivant le type d'opération d'assurance (R – K)

3. Probabilités viagères

0. Rappels
1. Probabilités viagères sur 1 tête
2. Probabilités viagères sur 2 têtes
3. Fonction de survie
4. <u>Taux instantané de mortalité</u>
   - Définition
   - Lien avec les probabilités viagères
   - Cas discret
5. Espérance de survie
6. Capital différé

Définition

Taux instantané de mortalité à l'âge x (notation : μ_x)

= taux de décès par unité de temps à l'âge x

$$\mu_x = \lim_{h \to 0} \frac{{}_h q_x}{h}$$

Expression en fonction de l_x

$$\begin{aligned}
\mu_x &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{l_x - l_{x+h}}{l_x} \\
&= -\frac{1}{l_x} \lim_{h \to 0} \frac{l_{x+h} - l_x}{h} \\
&= -\frac{l'_x}{l_x} \\
&= -(\ln l_x)'
\end{aligned}$$

Lien avec les probabilités viagères

$$ {}_t q_x = \int_0^t {}_s p_x \, \mu_{x+s} \, ds $$

Dém.

$$ \int_0^t {}_s p_x \, \mu_{x+s} \, ds = \int_0^t \frac{l_{x+s}}{l_x} \left(- \frac{l'_{x+s}}{l_{x+s}} \right) ds $$

$$ = - \frac{1}{l_x} \int_0^t (l_{x+s})'_s \, ds $$

$$ = - \frac{1}{l_x} \left(l_{x+t} - l_x \right) $$

$$ = {}_t q_x $$

$$ {}_t p_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu_s \, ds} $$

Dém.

$$ \int_x^{x+t} \mu_s \, ds = - \int_x^{x+t} (\ln l_s)' \, ds $$

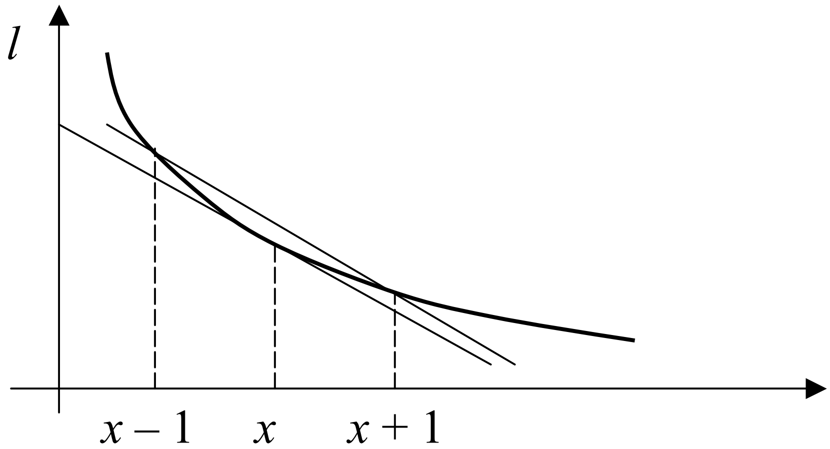
$$ = - \left(\ln l_{x+t} - \ln l_x \right) $$

$$ = - \ln \frac{l_{x+t}}{l_x} $$

$$ = - \ln {}_t p_x $$

Cas discret

Si les grandeurs sont définies pour x entier seulement, la dérivée n'a plus de sens



Approximation de la dérivée (pente de la tangente) par la pente de la corde :

$$l'_x \approx \frac{l_{x+1} - l_{x-1}}{2}$$

→ Taux instantané de mortalité approché :

$$\mu_x = -\frac{l'_x}{l_x} \approx \frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2l_x}$$

3. Probabilités viagères

0. Rappels
1. Probabilités viagères sur 1 tête
2. Probabilités viagères sur 2 têtes
3. Fonction de survie
4. Taux instantané de mortalité
5. <u>Espérance de survie</u>
    - Définition
    - Cas discret
6. Capital différé

Définition

Espérance de survie à l'âge x (notation : e_x)

= moyenne de la v.a. W_x, durée résiduelle de vie à l'âge x

$$\begin{aligned}1 - F_{W_x}(t) &= \Pr[W_x > t] \\ &= \Pr([V > x+t] \| [V > x]) \\ &= {}_t p_x \\ &= \frac{l_{x+t}}{l_x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e_x &= E(W_x) \\ &= \int_0^{+\infty} [1 - F_{W_x}(t)] dt \\ &= \frac{1}{l_x} \int_0^{+\infty} l_{x+t}\, dt\end{aligned}$$

Cas discret

On suppose, par symétrie, que tous les décès d'une année ont lieu au milieu de l'année

Les valeurs de la v.a. W_x sont : $\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\ldots\right\}$

avec

$$\Pr\left[W_x = t+\frac{1}{2}\right] = \Pr([x+t < V \leq x+t+1] | [V > x])$$
$$= \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x}$$

$$e_x = \sum_{t=0}^{\infty}\left(t+\frac{1}{2}\right)\frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x}$$
$$= \frac{1}{l_x}\left\{\sum_{t=0}^{\infty} t(l_{x+t} - l_{x+t+1}) + \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{\infty}(l_{x+t} - l_{x+t+1})\right\}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} t(l_{x+t} - l_{x+t+1}) = (l_{x+1} - l_{x+2}) + 2(l_{x+2} - l_{x+3}) + 3(l_{x+3} - l_{x+4}) + \ldots$$
$$= l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots$$

$$\sum_{t=0}^{\infty}(l_{x+t} - l_{x+t+1}) = (l_x - l_{x+1}) + (l_{x+1} - l_{x+2}) + (l_{x+2} - l_{x+3}) + \ldots = l_x$$

$$e_x = \frac{1}{l_x}\left\{(l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots) + \frac{1}{2}l_x\right\} = \frac{1}{l_x}\sum_{t=1}^{\infty} l_{x+t} + \frac{1}{2}$$

3. Probabilités viagères

0. Rappels
1. Probabilités viagères sur 1 tête
2. Probabilités viagères sur 2 têtes
3. Fonction de survie
4. Taux instantané de mortalité
5. Espérance de survie
6. <u>Capital différé</u>
    - Définition
    - Symboles de commutation

Définition

Capital différé de t années pour une personne d'âge x (notation : ${}_tE_x$)

> = valeur actuelle d'un versement de 1 UM dans t années, à une personne d'âge actuel x, si elle est toujours en vie (en $x + t$)

Première approche (probabiliste)

> Cette valeur actuelle est la moyenne d'une v.a. :

$$\begin{pmatrix} 0 & v^t \\ {}_tq_x & {}_tp_x \end{pmatrix}$$

> On a donc ${}_tE_x = {}_tp_x \cdot v^t = \dfrac{l_{x+t}}{l_x} v^t$

Deuxième approche (statistique)

> Les individus de la population fictive versent ${}_tE_x$ à l'âge x pour que les survivants reçoivent 1 UM t années plus tard. Equivalence :

$$l_x \cdot {}_tE_x = l_{x+t} \cdot v^t$$

Symboles de commutation

= expressions dépendant

- des probabilités viagères
- de facteurs d'actualisation

→ double entrée : âge – taux d'intérêt

Notation : $D_x = l_x \cdot v^x$

Capital différé

$$ {}_tE_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} v^t = \frac{l_{x+t} \cdot v^{x+t}}{l_x \cdot v^x} = \frac{D_{x+t}}{D_x} $$