PREMIERE PARTIE

CALCUL FINANCIER

CHAPITRE 1

ALGEBRE FINANCIERE

Sommaire

1. Algèbre financière

0. <u>Rappels</u>
    - Exponentielle et logarithme
    - Progression arithmétique
    - Progression géométrique
1. Intérêt simple et intérêt composé
2. Taux d'intérêt mensuel et instantané
3. Suites d'annuités constantes
4. Suites d'annuités variables
5. Opérations de prêt

Exponentielle et logarithme

Définitions

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}_0^+ \quad : \quad x \mapsto a^x \qquad (a > 0)$$

$$\mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R} \quad : \quad x \mapsto \log_a x \qquad (a > 0, \neq 1)$$

= fonctions réciproques l'une de l'autre :

$$\log_a(a^x) = x \qquad a^{\log_a x} = x$$

Propriété :

$$\log(x_1 \cdot x_2) = \log x_1 + \log x_2 \qquad \log(x^m) = m \log x$$

Changements de base : $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

$$a^x = e^{x \ln a} \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Dérivées

$$(e^x)' = e^x \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Progression arithmétique

Définition : suite $t_1, \ldots t_n, \ldots$ telle que

$$\forall k > 0, \qquad t_{k+1} = t_k + r$$

où r est la *raison* de la progression.

Propriétés

$$t_n = t_1 + (n-1)r$$

$$S_n = t_1 + \ldots + t_n = \frac{t_1 + t_n}{2} n$$

Dém.

$$t_n = t_{n-1} + r = t_{n-2} + 2r = t_{n-3} + 3r = \ldots = t_1 + (n-1)r$$

$$\begin{aligned} S_n &= t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n \\ &= t_n + t_{n-1} + t_{n-2} + \ldots + t_1 \\ &= \frac{1}{2}\left[(t_1 + t_n) + (t_2 + t_{n-1}) + (t_3 + t_{n-2}) + \ldots + (t_n + t_1)\right] \\ &= \frac{1}{2} n \cdot (t_1 + t_n) \end{aligned}$$

car $t_2 + t_{n-1} = (t_1 + r) + (t_n - r) = t_1 + t_n$

Progression géométrique

Définition : suite $t_1, \ldots t_n, \ldots$ telle que

$$\forall k > 0, \qquad t_{k+1} = t_k \cdot q$$

où q (> 0) est la *raison* de la progression.

Propriétés

$$t_n = t_1 \cdot q^{n-1}$$

$$P_n = t_1 \cdot \ldots \cdot t_n = (t_1 \cdot t_n)^{n/2}$$

$$S_n = t_1 + \ldots + t_n = \frac{t_1 - t_{n+1}}{1-q} = t_1 \frac{1-q^n}{1-q} \qquad (q \neq 1)$$

Dém. (3ème propriété)

$$S_n = t_1 + t_2 + \ldots + t_{n-1} + t_n$$

$$S_n \cdot q = t_1 q + t_2 q + \ldots + t_{n-1} q + t_n q$$

$$= t_2 + t_3 + \ldots + t_n + t_{n+1}$$

$$S_n(1-q) = t_1 - t_{n+1} = t_1 - t_1 q^n$$

Remarque : $\log\big(PG(q)\big) = PA(\log q)$

Série géométrique : somme (infinie) des termes d'une PG où $t_n = q^{n-1}$

Propriété : *Si* $q < 1$, *on a*

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \frac{1}{1-q}$$

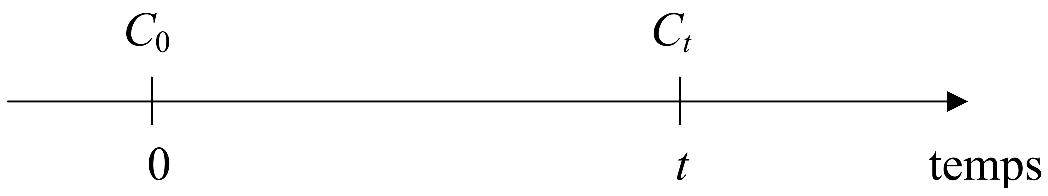
1. Algèbre financière

0. Rappels
1. Intérêt simple et intérêt composé
    - Intérêt
    - Intérêt simple
    - Intérêt composé
    - Principe d'équivalence
2. Taux d'intérêt mensuel et instantané
3. Suites d'annuités constantes
4. Suites d'annuités variables
5. Opérations de prêt

Intérêt

Intérêt = loyer du capital

Taux d'intérêt = intérêt produit par un montant de 1 UM au terme d'1 période (année) : i



C_0 = valeur actuelle (actualisée)
C_t = valeur acquise (capitalisée)

$$C_t = C_0 + I_t$$

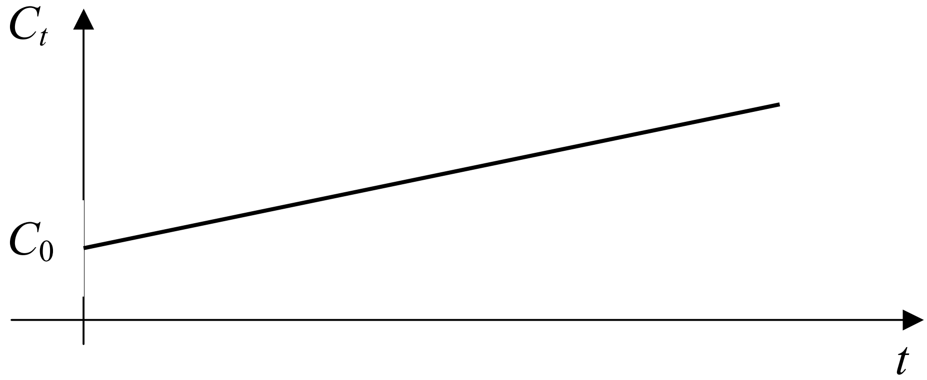
Intérêt simple (courte durée)

Intérêt simple = proportionnel au montant et à la durée :

$$I_t = C_0\, i\, t$$

Valeur acquise : $C_t = C_0 + C_0\, i\, t = C_0(1 + it)$

Valeur actuelle : $C_0 = \dfrac{C_t}{1 + it}$



Unité de i ?

Intérêt composé (longue durée)

Intérêt composé = capitalisation des intérêts année après année :

$$C_{t+1} = C_t \cdot (1+i)$$

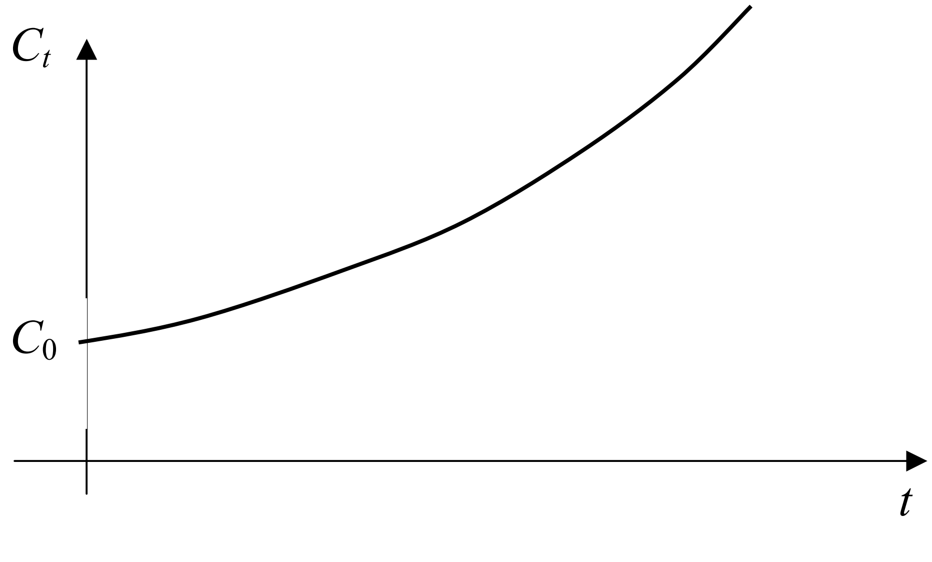
Valeur acquise :

$$C_1 = C_0 \cdot (1+i)$$
$$C_2 = C_1 \cdot (1+i) = C_0 \cdot (1+i)^2$$
$$C_3 = C_2 \cdot (1+i) = C_0 \cdot (1+i)^3$$
$$\cdots$$
$$C_t = C_0 \cdot (1+i)^t$$

NB : utilisé même pour t non entier (et quelle que soit la durée), donc, ligne brisée → courbe « douce »

Valeur actuelle :

$$C_0 = \frac{C_t}{(1+i)^t} = C_t \cdot (1+i)^{-t}$$



Principe d'équivalence

Remarque préliminaire

On peut généraliser la notion de valeur acquise :
la valeur acquise en T (pour le taux d'intérêt i) d'un montant C payé en t est égale à $C \cdot (1+i)^{T-t}$

Deux systèmes de payements

$$S \propto \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ S_1 & S_2 & \dots & S_n \end{pmatrix} \qquad S' \propto \begin{pmatrix} t'_1 & t'_2 & \dots & t'_m \\ S'_1 & S'_2 & \dots & S'_m \end{pmatrix}$$

sont *équivalents* pour i à l'instant T si égalité des valeurs acquises en T :

$$\sum_{j=1}^{n} S_j (1+i)^{T-t_j} = \sum_{k=1}^{m} S'_k (1+i)^{T-t'_k}$$

Principe d'équivalence : cette notion est indépendante de l'époque T de capitalisation.

Dém.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} S_j (1+i)^{\tilde{T}-t_j} &= (1+i)^{\tilde{T}-T} \sum_{j=1}^{n} S_j (1+i)^{T-t_j} \\ &= (1+i)^{\tilde{T}-T} \sum_{k=1}^{m} S'_k (1+i)^{T-t'_k} \\ &= \sum_{k=1}^{m} S'_k (1+i)^{\tilde{T}-t'_k} \end{aligned}$$

N.B. : Faux pour i – Valable pour int. composé seulement

1. Algèbre financière

0. Rappels
1. Intérêt simple et intérêt composé
2. <u>Taux d'intérêt mensuel et instantané</u>
    - Taux mensuel équivalent
    - Taux instantané équivalent
3. Suites d'annuités constantes
4. Suites d'annuités variables
5. Opérations de prêt

Taux mensuel équivalent

Capitalisation mensuelle au taux (mensuel) i_m

Valeur acquise après s mois : $C_0 \cdot (1+i_m)^s$

i_m équivalent au taux annuel i_a si, après t années,

$$C_t = C_0 \cdot (1+i_a)^t = C_0 \cdot (1+i_m)^{12t}$$

$$1 + i_a = (1+i_m)^{12}$$

NB : - notation fréquente : $i_m = \dfrac{j(12)}{12}$ $\left(\neq \dfrac{i_a}{12} \text{ !!!} \right)$

- valable pour d'autres durées

Taux instantané équivalent

(ou *exponentiel* ou *continu*)

Capitalisation par *n*-ème d'année, au taux équivalent α_n / n

Taux instantané : $\alpha = \lim_{n \to \infty} \alpha_n$

$$C_{t+\frac{1}{n}} = C_t \cdot \left(1 + \frac{\alpha_n}{n} \right)$$

$$\frac{C_{t+\frac{1}{n}} - C_t}{1/n} = C_t \cdot \alpha_n$$

$$C'_t = C_t \cdot \alpha$$

$$C'_t = \left(C_0 \cdot (1+i)^t \right)' = C_0 \cdot (1+i)^t \cdot \ln(1+i) = C_t \cdot \ln(1+i)$$

$$\alpha = \ln(1+i)$$

$$C_t = C_0 \cdot (1+i)^t = C_0 \cdot e^{\alpha t}$$

1. Algèbre financière

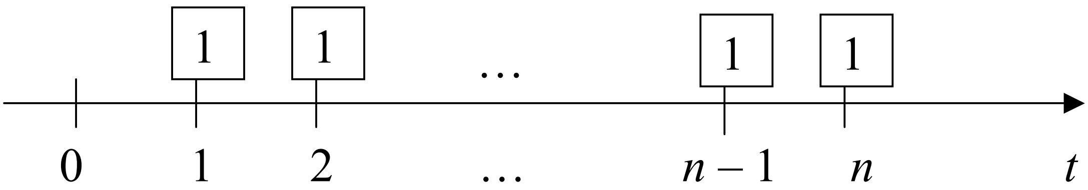
0. Rappels
1. Intérêt simple et intérêt composé
2. Taux d'intérêt mensuel et instantané
3. <u>Suites d'annuités constantes</u>
    - Définition
    - Annuités ordinaires : valeur actuelle
    - Annuités ordinaires : valeur acquise
    - Aspects numériques
    - Annuités anticipatives
    - Annuités différées
    - Annuités anticipatives et différées
    - Résumé
    - Perpétuités
    - Annuités ordinaires fractionnées
    - Annuités fractionnées : résumé
4. Suites d'annuités variables
5. Opérations de prêt

Définition

Suite d'annuités = payements échelonnés, d'époques équidistantes, qui peuvent être

a. variables ou constantes (de montant 1)
b. annuelles, mensuelles, …
c. temporaires (n annuités) ou perpétuelles
d. immédiates ou différées
e. anticipatives ou à terme échu

Modalités soulignées : « annuités ordinaires »



Notations : $u = 1 + i \qquad v = \dfrac{1}{u} = (1+i)^{-1}$

$$C_t = C_0 \cdot u^t \qquad C_0 = C_t \cdot v^t$$

Annuités ordinaires : valeur actuelle

= somme des valeurs actuelles (en $t = 0$) des différentes annuités (notation : $a_{\overline{n}|}$)

Valeur actuelle de la t-ème annuité : $1 \cdot v^t$

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}|} &= v + v^2 + \ldots + v^n \\ &= \frac{v - v^{n+1}}{1 - v}\left(\times \frac{u}{u}\right) \\ &= \frac{1 - v^n}{i} \end{aligned}$$

N.B. : Pour une perpétuité, on a $a_{\overline{n}|} = \frac{1}{i}$

Annuités ordinaires : valeur acquise

= somme des valeurs acquises (en $t = n$) des différentes annuités (notation : $s_{\overline{n|}}$)

Valeur acquise de la t-ème annuité : $1 \cdot u^{n-t} = u^n v^t$

$$
\begin{aligned}
s_{\overline{n|}} &= u^n (v + v^2 + \ldots + v^n) \\
&= u^n a_{\overline{n|}} \\
&= u^n \frac{1 - v^n}{i} \\
&= \frac{u^n - 1}{i}
\end{aligned}
$$

Aspects numériques

Eléments d'un problème d'annuités

- montant de l'annuité
- valeur acquise/actuelle
- <u>durée</u>
- <u>taux d'intérêt</u>

Durée : en exposant → logarithme

Taux d'intérêt

- tables financières
- approximations successives
- méthodes itératives (Newton-Raphson)
- outils tableur (valeur cible – solveur)

Annuités anticipatives

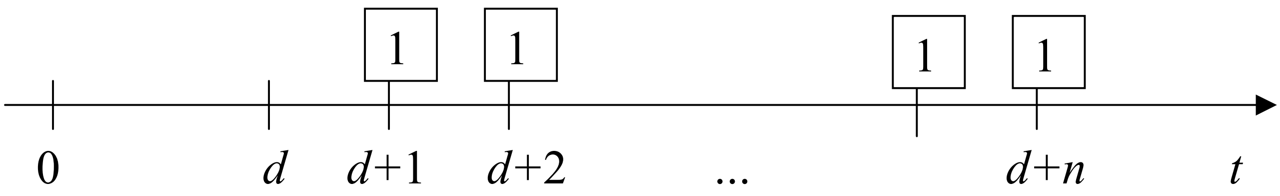
Valeur actuelle (en $t = 0$)

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{\overline{n}|} &= 1 + v + \ldots + v^{n-1} \\
&= \frac{1 - v^n}{1 - v}\left(\times \frac{u}{u}\right) \\
&= u\,\frac{1 - v^n}{i} \\
&= u \cdot a_{\overline{n}|}
\end{aligned}$$

Valeur acquise (en $t = n$) : même raisonnement

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = u \cdot s_{\overline{n}|}$$

Annuités différées

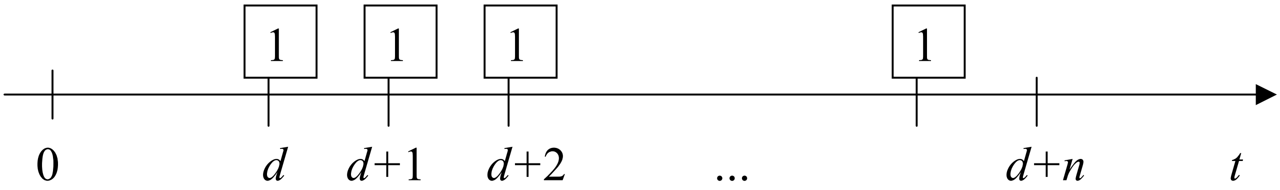


Valeur actuelle (en $t = 0$) – Notation : ${}_{d|}a_{\overline{n}|}$

$$
\begin{aligned}
{}_{d|}a_{\overline{n}|} &= \sum_{k=1}^{n} v^{d+k} \\
&= v^{d} \cdot a_{\overline{n}|}
\end{aligned}
$$

Valeur acquise (en $t = d + n$) ?

Annuités anticipatives et différées



Valeur actuelle (en $t = 0$) – Notation : ${}_{d|}\ddot{a}_{\overline{n|}}$

$$
\begin{aligned}
{}_{d|}\ddot{a}_{\overline{n|}} &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{d+k} \\
&= v^{d-1} \cdot a_{\overline{n|}}
\end{aligned}
$$

Valeur acquise (en $t = d + n$) ?

Résumé

	terme échu	anticipative
immédiate	$a_{\overline{n}\vert} = \dfrac{1-v^n}{i}$ $s_{\overline{n}\vert} = \dfrac{u^n - 1}{i}$	$\ddot{a}_{\overline{n}\vert} = u \cdot a_{\overline{n}\vert}$ $\ddot{s}_{\overline{n}\vert} = u \cdot s_{\overline{n}\vert}$
différée (d)	${}_{d\vert}a_{\overline{n}\vert} = v^d \cdot a_{\overline{n}\vert}$ ${}_{d\vert}s_{\overline{n}\vert} = s_{\overline{n}\vert}$	${}_{d\vert}\ddot{a}_{\overline{n}\vert} = v^{d-1} \cdot a_{\overline{n}\vert}$ ${}_{d\vert}\ddot{s}_{\overline{n}\vert} = u \cdot s_{\overline{n}\vert}$

$\boxed{\times\, v^d}$ (pour a !)

$\boxed{\times\, u}$

Perpétuités

Définition : nombre d'annuités infini ($n \to \infty$)

Valable pour les valeurs actuelles seulement

$$a_{\overline{n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-v^n}{i} = \frac{1}{i}$$

De la même manière,

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{u}{i}$$

$$_{d|}a_{\overline{n|}} = \frac{v^d}{i}$$

$$_{d|}\ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{v^{d-1}}{i}$$

Annuités ordinaires fractionnées

Définition : le montant annuel 1 est payé par m versements de montant $1/m$ par année

Valeur actuelle (notation $a_{\overline{n}|}^{(m)}$)

$$\begin{aligned}
a_{\overline{n}|}^{(m)} &= \sum_{k=1}^{nm} \frac{1}{m}\left(1+\frac{j(m)}{m}\right)^{-k} \\
&= \frac{1}{m}\cdot\frac{\left(1+\frac{j(m)}{m}\right)^{-1}-\left(1+\frac{j(m)}{m}\right)^{-nm-1}}{1-\left(1+\frac{j(m)}{m}\right)^{-1}} \\
&= \frac{1}{m}\cdot\frac{1-\left(1+\frac{j(m)}{m}\right)^{-nm}}{\left(1+\frac{j(m)}{m}\right)-1} \\
&= \frac{1}{m}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{\frac{j(m)}{m}} \\
&= \frac{1-v^n}{j(m)}
\end{aligned}$$

Valeur acquise (notation $s_{\overline{n}|}^{(m)}$) : même raisonnement

$$s_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{u^n-1}{j(m)}$$

Annuités fractionnées : résumé

	terme échu	anticipative
immédiate	$a^{(m)}_{\overline{n}\vert} = \dfrac{1-v^n}{j(m)}$ $s^{(m)}_{\overline{n}\vert} = \dfrac{u^n - 1}{j(m)}$	$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}\vert} = u^{1/m} \cdot a^{(m)}_{\overline{n}\vert}$ $\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}\vert} = u^{1/m} \cdot s^{(m)}_{\overline{n}\vert}$
différée (d)	${}_{d\vert}a^{(m)}_{\overline{n}\vert} = v^d \cdot a^{(m)}_{\overline{n}\vert}$ ${}_{d\vert}s^{(m)}_{\overline{n}\vert} = s^{(m)}_{\overline{n}\vert}$	${}_{d\vert}\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}\vert} = v^d \cdot u^{1/m} \cdot a^{(m)}_{\overline{n}\vert}$ ${}_{d\vert}\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}\vert} = u^{1/m} \cdot s^{(m)}_{\overline{n}\vert}$

$\boxed{\times\, v^d}$ (pour a !)

$\boxed{\times\, u^{1/m}}$

1. Algèbre financière

0. Rappels
1. Intérêt simple et intérêt composé
2. Taux d'intérêt mensuel et instantané
3. Suites d'annuités constantes
4. <u>Suites d'annuités variables</u>
   - Deux cas
   - Annuités arithmétiques
   - Annuités géométriques
5. Opérations de prêt

Deux cas

N.B. : ici, terme échu

a) Montants en progression arithmétique

$$1,\ 1+r,\ 1+2r,\ \ldots,\ 1+(n-1)r$$

Notations : $Ia_{\overline{n|}}$ $Is_{\overline{n|}}$

b) Montants en progression géométrique

$$1,\ q,\ q^2,\ \ldots,\ q^{n-1}$$

Notations : $Ga_{\overline{n|}}$ $Gs_{\overline{n|}}$

Annuités arithmétiques

$$1,\ 1+r,\ 1+2r,\ \ldots,\ 1+(n-1)r$$

Valeur actuelle

$$\begin{aligned}
Ia_{\overline{n|}} &= \sum_{k=1}^{n} [1+(k-1)r]v^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} v^k + r\sum_{k=1}^{n} (k-1)v^k \\
&= a_{\overline{n|}} + r[v^2 + 2v^3 + 3v^4 + \ldots + (n-1)v^n] \\
&= a_{\overline{n|}} + rS
\end{aligned}$$

$$Sv = v^3 + 2v^4 + 3v^5 + \ldots + (n-1)v^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
S(1-v) &= v^2 + v^3 + v^4 + \ldots + v^n - (n-1)v^{n+1} \\
&= v^2 + v^3 + v^4 + \ldots + v^n + v^{n+1} - nv^{n+1} \\
&= va_{\overline{n|}} - nv^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ia_{\overline{n|}} &= a_{\overline{n|}} + r\frac{va_{\overline{n|}} - nv^{n+1}}{1-v} \\
&= a_{\overline{n|}} + \frac{r}{i}(a_{\overline{n|}} - nv^n)
\end{aligned}$$

$$1,\ 1+r,\ 1+2r,\ \ldots,\ 1+(n-1)r$$

Valeur acquise

$$\begin{aligned}
Is_{\overline{n|}} &= \sum_{k=1}^{n} [1+(k-1)r]u^{n-k} \\
&= u^n Ia_{\overline{n|}} \\
&= u^n\left(a_{\overline{n|}} + \frac{r}{i}(a_{\overline{n|}} - nv^n)\right) \\
&= u^n a_{\overline{n|}} + \frac{r}{i}(u^n a_{\overline{n|}} - nu^n v^n) \\
&= s_{\overline{n|}} + \frac{r}{i}(s_{\overline{n|}} - n)
\end{aligned}$$

Annuités géométriques

$$1,\ q,\ q^2,\ \ldots,\ q^{n-1}$$

Valeur actuelle

$$\begin{aligned} Ga_{\overline{n}|} &= \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} v^k \\ &= v\frac{1-(qv)^n}{1-qv} \\ &= \frac{1-(qv)^n}{u-q} \end{aligned}$$

Valeur acquise

$$\begin{aligned} Gs_{\overline{n}|} &= \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} u^{n-k} \\ &= u^n Ga_{\overline{n}|} \\ &= u^n \frac{1-(qv)^n}{u-q} \\ &= \frac{u^n - q^n}{u-q} \end{aligned}$$

1. Algèbre financière

0. Rappels
1. Intérêt simple et intérêt composé
2. Taux d'intérêt mensuel et instantané
3. Suites d'annuités constantes
4. Suites d'annuités variables
5. <u>Opérations de prêt</u>
    - Principes
    - Prêt remboursable au terme
    - Prêt remboursable par amortissements constants
    - Prêt remboursable par annuités constantes

Principes

Capital ($t = 0$)

Emprunteur $\longleftarrow$ / $\longrightarrow$ Prêteur

Amortissement du capital (échelonné)
Intérêts (sur solde restant dû)

Montants

- capital prêté : 1 UM
- amortissement du capital : $A_1, \ldots, A_n$
- intérêts : $I_1, \ldots, I_n$

Charge de remboursement : $x_t = A_t + I_t$

$$A_1 + \ldots + A_n = 1$$

$$SRD_{t(+)} = 1 - (A_1 + \ldots + A_t)$$

$$I_t = i \cdot SRD_{t-1}$$

N.B. : $SRD_0 = 1$, $SRD_n = 0$

Prêt remboursable au terme

Définition : $A_1 = \ldots = A_{n-1} = 0 \qquad A_n = 1$

Solde restant dû : $SRD_1 = \ldots = SRD_{n-1} = 1$

Intérêt : $I_1 = \ldots = I_n = i$

Charge de remboursement :

$$\begin{cases} x_1 = \ldots = x_{n-1} = i \\ x_n = 1 + i \end{cases}$$

Prêt remboursable par amortissements constants

Définition : $A_1 = \ldots = A_n$

Amortissement : $A_t = \dfrac{1}{n} \quad (t = 1, \ldots, n)$

Solde restant dû : $SRD_t = 1 - \dfrac{t}{n} \quad (t = 1, \ldots, n)$

Intérêt : $I_t = i \cdot \left(1 - \dfrac{t-1}{n}\right) \quad (t = 1, \ldots, n)$

Charge de remboursement :

$$x_t = \frac{1}{n} + i \cdot \left(1 - \frac{t-1}{n}\right) \quad (t = 1, \ldots, n)$$

Prêt remboursable par annuités constantes

Définition : $x_1 = \ldots = x_n (= x)$

Amortissement :

$$x = A_t + I_t = A_{t-1} + I_{t-1}$$

$$\begin{aligned} A_t &= A_{t-1} + (I_{t-1} - I_t) \\ &= A_{t-1} + i \cdot (SRD_{t-2} - SRD_{t-1}) \\ &= A_{t-1} + i \cdot \left([1 - (A_1 + \ldots + A_{t-2})] - [1 - (A_1 + \ldots + A_{t-1})] \right) \\ &= A_{t-1} + i \cdot A_{t-1} \\ &= u \cdot A_{t-1} \\ &= u^2 \cdot A_{t-2} \\ &\ldots \\ &= u^{t-1} \cdot A_1 \end{aligned}$$

$$\sum_{t=1}^{n} A_t = A_1 \sum_{t=1}^{n} u^{t-1} = A_1 \frac{1 - u^n}{1 - u} = A_1 \frac{u^n - 1}{i} = A_1 \cdot s_{\overline{n}|} = 1$$

$$A_t = \frac{u^{t-1}}{s_{\overline{n}|}} \qquad (t = 1, \ldots, n)$$

Solde restant dû :

$$SRD_t = 1 - \sum_{j=1}^{t} A_j = 1 - \frac{1}{s_{\overline{n}|}} \sum_{j=1}^{t} u^{j-1} = 1 - \frac{s_{\overline{t}|}}{s_{\overline{n}|}}$$

Intérêt :

$$I_t = i \cdot \left(1 - \frac{s_{\overline{t-1|}}}{s_{\overline{n|}}}\right)$$

Charge de remboursement :

$$\begin{aligned} x &= \frac{u^{t-1}}{s_{\overline{n|}}} + i \cdot \left(1 - \frac{s_{\overline{t-1|}}}{s_{\overline{n|}}}\right) \\ &= \frac{1}{s_{\overline{n|}}}\left[u^{t-1} + (u^n - 1) - (u^{t-1} - 1)\right] \\ &= \frac{u^n}{s_{\overline{n|}}} \end{aligned}$$

$$\left(\times \frac{v^n}{v^n}\right) = \frac{1}{a_{\overline{n|}}}$$

(indépendant de t !!!)