## ×SUR L'ÉQUATION $(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)=u^2+v^2+w^2$;

par E. CATALAN (*).

I. Si, dans la célèbre identité d'Euler (**), on suppose $d=0$, $d'=0$, elle se réduit à

$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)=(aa'+bb'+cc')^2+ (ab'-ba')^2+(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2;$$

ou, par un changement de notation, à

$$(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)=\mathrm{P}= (xx'+yy'+zz')^2+(xy'-yx')^2+(yz'-zy')^2+(zx'-xz')^2.$$

II. 1° Soient

$$\frac{x}{x'}\gtrless\frac{y}{y'},\quad \frac{y}{y'}\gtrless\frac{z}{z'},\quad \frac{z}{z'}\gtrless\frac{x}{x'}:$$

P *est une somme de quatre carrés.*

2° Soient

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}\gtrless\frac{z}{z'}:$$

P *est une somme de trois carrés.*

3° Soient

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}:$$

P *est carré.*

Par conséquent :

*Si deux des rapports*

$$\frac{x}{x'},\quad \frac{y}{y'},\quad \frac{z}{z'},$$

*sont égaux entre eux, et différents du troisième, le produit* P *est, certai-*

---

(*) A l'occasion de la question suivante proposée par M. De Rocquigny (*Mathesis*, 1892, p. (136) : *Si dans l'identité*

$$(a^2+\lambda b^2)(a'^2+\lambda b'^2)=(aa'+\lambda bb')^2+\lambda(ab'-ba')^2,$$

*on remplace* $\lambda$ *par* $c^2+d^2$, *on a une solution de l'équation*

$$(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)=u^2+v^2+w^2.$$

(**) *Nouvelles Annales*, 1874, p. 519.

*nement, la somme de trois carrés;* et l'on a une solution de la question proposée (*).

Néanmoins, on ne peut affirmer que ces conditions, *suffisantes*, soient *nécessaires*. Car, dans certains cas, la somme de trois carrés peut être : un carré ; une somme de deux carrés ; une somme de quatre carrés.

Exemples :

$$4+4+1=9,\ 169+16+9=169+25,\ 25+4+1=16+9+4+1;$$

$$a^2(ab+c^2)^2+b^2(ab+c^2)^2+c^2(ab-a^2-b^2)^2=$$
$$9a^2b^2c^2+(b^2-c^2)^2a^2+(c^2-a^2)^2b^2+(a^2-b^2)^2c^2;\ \text{etc.}$$

Remarque : La méthode précédente ne donne pas toutes les solutions de l'équation proposée. Ainsi, l'on n'en peut déduire l'identité

$$(9+4+1)(1+1+1)=25+16+1.$$

Liége, 2 avril 1893.

---

## SUR LES DEUX PARABOLES CIRCONSCRITES A UN QUADRANGLE DONNÉ;

par M. Kluyver, professeur à l'Université de Leyde.

Par les sommets A, B, C, D d'un quadrangle complet, on peut faire passer deux paraboles $P_1$ et $P_2$, réelles ou imaginaires. Nous allons voir comment les paramètres $p_1$ et $p_2$ de ces courbes et l'angle $\varphi$ de leurs axes dépendent du quadrangle donné.

I. Représentons les deux courbes par

$$y^2=2p_1x,\quad ax^2+by^2+c+2fy+2gx+2hxy=0,\quad (ab-h^2=0).$$

Appelons $(x_1, y_1), \ldots (x_4, y_4)$ les coordonnées des sommets A, B, C, D, et posons

$$\Sigma y_1=s_1,\quad \Sigma y_1y_2=s_2,\quad \Sigma y_1y_2y_3=s_3,\quad y_1y_2y_3y_4=s_4.$$

La parabole $P_2$ étant circonscrite au quadrangle, il faut qu'on ait

$$as_1=4hp_1,\quad as_2=4p_1^2b+4p_1g,\quad as_3=-8p_1^2f,\quad as_4=4p_1^2c;$$

on peut donc mettre l'équation de $P_2$ sous la forme

$$(4p_1x-s_1y)^2+4s_4-4s_3y+2p_1(4s_2-s_1^2)\,x=0\ldots \qquad (1)$$

---

(*) On peut consulter, relativement à ce sujet : *Sur quelques décompositions en carrés* (Rome, 1887), *Congrès de Rouen* (1883, p. 98); etc.