

Article

SUR L'EQUATION.

in: Mathesis : recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne | Mathesis - 13 | SUR L'EQUATION. SUR LES DEUX ...

Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library. Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions. Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library. For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek
Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Purchase a CD-ROM

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:
Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen, Germany, Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

*SUR L'ÉQUATION $(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) = u^2 + v^2 + w^2$;

par E. CATALAN (*).

I. Si, dans la célèbre identité d'Euler (**), on suppose $d = 0$, $d' = 0$, elle se réduit à

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) = (aa' + bb' + cc')^2 + (ab' - ba')^2 + (bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2;$$

ou, par un changement de notation, à

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) = P = (xx' + yy' + zz')^2 + (xy' - yx')^2 + (yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2.$$

II. 1° Soient

$$\frac{x}{x'} \geq \frac{y}{y'}, \quad \frac{y}{y'} \geq \frac{z}{z'}, \quad \frac{z}{z'} \geq \frac{x}{x'};$$

P est une somme de quatre carrés.

2° Soient

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} \geq \frac{z}{z'};$$

P est une somme de trois carrés.

3° Soient

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'};$$

P est carré.

Par conséquent :

Si deux des rapports

$$\frac{x}{x'}, \quad \frac{y}{y'}, \quad \frac{z}{z'},$$

sont égaux entre eux, et différents du troisième, le produit P est, certai-

(*) A l'occasion de la question suivante proposée par M. De Rocquigny (*Mathesis*, 1892, p. (136) : Si dans l'identité

$$(a^2 + \lambda b^2)(a'^2 + \lambda b'^2) = (aa' + \lambda bb')^2 + \lambda (ab' - ba')^2,$$

on remplace λ par $c^2 + d^2$, on a une solution de l'équation

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) = u^2 + v^2 + w^2.$$

(**) *Nouvelles Annales*, 1874, p. 519.

nement, la somme de trois carrés; et l'on a une solution de la question proposée (*).

Néanmoins, on ne peut affirmer que ces conditions, *suffisantes*, soient *nécessaires*. Car, dans certains cas, la somme de trois carrés peut être : un carré; une somme de deux carrés; une somme de quatre carrés.

EXEMPLES :

$$4 + 4 + 1 = 9, \quad 169 + 16 + 9 = 169 + 25, \quad 25 + 4 + 1 = 16 + 9 + 4 + 1;$$

$$a^2(ab + c^2)^2 + b^2(ab + c^2)^2 + c^2(ab - a^2 - b^2)^2 =$$

$$9a^2b^2c^2 + (b^2 - c^2)^2a^2 + (c^2 - a^2)^2b^2 + (a^2 - b^2)^2c^2; \text{ etc.}$$

REMARQUE : La méthode précédente ne donne pas toutes les solutions de l'équation proposée. Ainsi, l'on n'en peut déduire l'identité

$$(9 + 4 + 1)(1 + 1 + 1) = 25 + 16 + 1.$$

Liège, 2 avril 1893.

SUR LES DEUX PARABOLES CIRCONSCRITES A UN QUADRANGLE DONNÉ;

par M. KLUYVER, professeur à l'Université de Leyde.

Par les sommets A, B, C, D d'un quadrangle complet, on peut faire passer deux paraboles P₁ et P₂, réelles ou imaginaires. Nous allons voir comment les paramètres p₁ et p₂ de ces courbes et l'angle φ de leurs axes dépendent du quadrangle donné.

I. Représentons les deux courbes par

$$y^2 = 2p_1x, \quad ax^2 + by^2 + c + 2fy + 2gx + 2hxy = 0, \quad (ab - h^2 = 0).$$

Appelons (x₁, y₁), ... (x₄, y₄) les coordonnées des sommets A, B, C, D, et posons

$$\Sigma y_1 = s_1, \quad \Sigma y_1 y_2 = s_2, \quad \Sigma y_1 y_2 y_3 = s_3, \quad y_1 y_2 y_3 y_4 = s_4.$$

La parabole P₂ étant circonscrite au quadrangle, il faut qu'on ait

$$as_1 = 4hp_1, \quad as_2 = 4p_1^2 b + 4p_1 g, \quad as_3 = -8p_1^2 f, \quad as_4 = 4p_1^2 c;$$

on peut donc mettre l'équation de P₂ sous la forme

$$(4p_1x - s_1y)^2 + 4s_4 - 4s_3y + 2p_1(4s_2 - s_1^2)x = 0 \dots \quad (1)$$

(*) On peut consulter, relativement à ce sujet : *Sur quelques décompositions en carrés* (Rome, 1887), *Congrès de Rouen* (1883, p. 98); etc.