du point de rencontre Q des normales à l'ellipse C aux points où elle est coupée par A_1B_1.

Du point Q menons les deux autres normales à l'ellipse, puis les tangentes aux points d'incidence. Elles se coupent au point M′ (α, β); et d'après les formules de Joachimsthal, il existe entre les coordonnées des points M_1 et M′ les relations

$$\frac{a\alpha}{\cos\varphi} = -a^2, \quad \frac{\beta b}{\sin\varphi} = -b^2,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Le point M′ est donc sur l'ellipse C, et par suite le point Q appartient à la développée de cette ellipse.

×SUR UN THÉORÈME DE M. SHARP(*);

par M. E. Catalan.

Ce théorème consiste en ce que l'on a

$$\frac{x^{4n} - x^{3n} + x^{2n} - x^n + 1}{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1} = entier(**),$$

si n est *impair* et premier avec 5.

Si, au lieu de la fraction précédente, on considère celle-ci :

$$\frac{x^{4n} + x^{3n} + x^{2n} + x^n + 1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} = y,$$

y est un polynôme *entier ;* en sorte que la restriction n *impair* devient inutile. En effet,

$$y = \frac{x^{5n} - 1}{x^n - 1} \times \frac{x - 1}{x^5 - 1} = \frac{(x-1)(x^{5n}-1)}{(x^n-1)(x^5-1)}.$$

(*) *Mathesis*, septembre 1891, p. 208.

(**) Dans *Mathesis*, l'exposant n a été omis dans x^n.

Or, en général, les nombres entiers p, q étant premiers, entre eux :

$$\frac{(x-1)(x^{pq}-1)}{(x^p-1)(x^q-1)} = \textit{entier}\ (*).$$

Dans le cas de la *question proposée*, si l'on prend $n = 3$, le quotient Q équivaut à

$$\frac{x^{12}-x^9+x^6-x^3+1}{x^4-x^3+x^2-x+1} = \frac{x^{15}+1}{x^3+1}\cdot\frac{x+1}{x^5+1}.$$

Le degré de ce quotient est

$$15+1-3-5=8.$$

On peut le former aisément, de la manière suivante, déjà indiquée.

Développant en série, on a

$$Q=(1+x)(1+x^{15})(1-x^3+x^6-\cdots)(1-x^5+x^{10}-\cdots);$$

ou, en négligeant les termes dont le degré surpasse 8,

$$\begin{aligned} Q &= (1+x)(1-x^3+x^6)(1-x^5)=(1+x)(1-x^3+x^6-x^5+x^8)\\ &= 1-x^3-x^5+x^6+x^8+x-x^4-x^6+x^7\\ &= 1+x-x^3-x^4-x^5+x^7+x^8. \end{aligned}$$

En effet, le produit de ce polynôme, par

$$1-x-x^2-x^3+x^4 \quad \text{est} \quad 1-x^3+x^6-x^9+x^{12}.$$

Liège, 1er octobre 1891.

×QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT.

Limite d'un quotient.

1. Théorème. *La limite du quotient de deux variables commensurables, dont chacune a une limite commensurable, est égale au quotient de ces limites.*

Soient u, v deux variables commensurables, positives ou négatives, ayant respectivement pour limites les constantes a, b. Cela signifie que les différences

$$\alpha = u - a, \quad \beta = v - b,$$

(*) *Mathesis*, tome X, p. 241.