

Article

REMARQUES SUR UNE NOTE DE M. ÉDOUARD LUCAS.

Catalan, E.

in: Mathesis : recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne | Mathesis - 10 | SUR L'EMPLOI DES COORDONNÉES BA...

Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library. Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions. Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek
Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Purchase a CD-ROM

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:
Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen, Germany, Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

cercle générateur, multipliée par la circonférence décrite par le centre de ce cercle.

Pour le démontrer, on inscrit, au cercle générateur, un polygone régulier, d'un nombre de côtés indéfiniment croissant. Le volume du corps engendré par ce polygone est égal à sa surface, multipliée par la circonférence décrite par son centre (12). Passant à la limite, on aura, pour le volume du tore,

$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi l = 2\pi^2 r^2 l,$$

r désignant le rayon du cercle générateur et l la distance du centre de ce cercle à l'axe.

On peut dire encore que *le volume du tore est égal à sa surface, multipliée par la moitié du rayon du cercle générateur.*

NOTE. M. CATALAN, dans ses *Éléments de Géométrie* (2^me édition, 1866, pp. 343-345), trouve l'aire et le volume du tore en démontrant d'abord un cas particulier du théorème de Guldin, celui où l'on fait tourner autour d'un axe XY, une ligne ou une figure admettant un axe de symétrie parallèle à XY. Le cas où la méridienne a un centre de symétrie peut également se traiter sans difficulté. — Dans leurs *Éléments de Géométrie* (4^me édition, 1888), MM. ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE ne s'occupent ni du théorème de Guldin, ni du tore; mais dans leur *Traité de Géométrie* (4^e édition, 1879, t. II, pp. 228-233), ils démontrent le théorème de Guldin et l'appliquent au tore. En introduisant dans l'article de M. Gelin la considération des segments additifs et soustractifs, on pourrait en généraliser plusieurs relations, et arriver assez rapidement au théorème général de Guldin. (Rédaction).

REMARQUES SUR UNE NOTE DE M. ÉDOUARD LUCAS;

par M. E. CATALAN, professeur émérite à l'Université de Liège.

1. Cette intéressante Note (*) peut être abrégée et simplifiée. En effet, l'équation

$$ax + by = c \quad (1)$$

admet $q + 1$ ou q solutions positives(**) suivant que l'équation auxiliaire

$$ax' + by' = c' \quad (2)$$

(*) *Mathesis*, juin 1890, p. 129.

(**) C' est-à-dire, solutions en nombres entiers. On suppose $c = abq + c'$, $0 < c' < ab$.

a ou n'a pas de solution positive (*). La question est donc ramenée à celle-ci :

« Le nombre entier c étant inférieur au produit ab , dans quel cas l'équation (1) admet-elle une solution en nombres entiers? (**)

2. Le criterium proposé par M. Lucas est exact, mais à peu près illusoire, à cause des calculs qu'il exige. Prenons, comme exemple, l'équation

$$47x + 31y = 875,$$

laquelle satisfait à toutes les conditions indiquées ci-dessus. En employant les notations de M. Lucas, on a d'abord :

$$a = 47, \quad b = 31, \quad r = 875.$$

Ensuite :

$$\frac{47}{31} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{15}}}, \quad \alpha = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2};$$

donc

$$\alpha = 3, \quad \beta = 2, \quad n = 4.$$

La formule

$$t = (-1)^{n-1} \frac{a\alpha + b\beta}{a^2 + b^2} r^{(***)}$$

donne

$$\begin{aligned} t &= -\frac{47 \cdot 3 + 31 \cdot 2}{47^2 + 31^2} \cdot 875 = -\frac{141 + 62}{2209 + 961} \cdot 875 \\ &= -\frac{203}{3170} \cdot 875 = -\frac{203}{634} \cdot 175 = -\frac{35525}{634}. \end{aligned}$$

La fraction, prise positivement, est comprise entre 56 et 57. Donc

$$t > -57, \quad t < -56; \quad t_1 = -57, \quad t_2 = -56.$$

Les équations

$$\begin{aligned} (-1)^{n-1} (a\alpha + b\beta) r &= t_1 (a^2 + b^2) + \rho_1, \\ (-1)^{n-1} (a\alpha + b\beta) r &= t_2 (a^2 + b^2) - \rho_2^{(iv)}, \end{aligned}$$

(*) *Mélanges mathématiques*, tome I, p. 25.

(**) Dans ce qui va suivre, nous supposons 1° $a > 1$, $b > 1$; 2° c premier avec a et avec b ; 3° $c > a + b$.

Si les deux dernières hypothèses n'étaient pas vérifiées, l'équation (1) pourrait être simplifiée; ou elle serait impossible; ou enfin, on aurait $x = 1, y = 1$.

(***) *Mathesis*, p. 131.

(iv) *Loc. cit.*

se réduisent à

$$-203.875 = -57.3170 + \rho_1, \quad -203.875 = -56.3170 - \rho_2.$$

Il résulte, de celles-ci :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 57.3170 - 203.875 = 180.690 - 177.625 = 3.065, \\ \rho_2 &= -56.3170 + 203.875 = 177.625 - 177.520 = 105(*). \end{aligned}$$

Reste, enfin, à former les binômes,

$$ar - b\rho_1, \quad br - a\rho_2(**).$$

Le premier égale

$$47.875 - 31.3065 = 41.125 - 95.015 = -53.890.$$

Le second :

$$31.875 - 47.105 = 27.125 - 4.935 = +22.190.$$

Ainsi, la proposée admet une solution positive.

3. Si l'on résout, directement, l'équation

$$47x + 31y = 875,$$

on a, par le procédé connu(***),

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 47 & 31 & 16 & 15 & 1 \\ \hline 875 & 7 & 7 & 7 & 0 \end{array};$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{7}{1} &= 7, \quad \frac{7-16.7}{15} = -7, \quad x = \frac{7+31.7}{16} = 14, \\ 7 &= \frac{875-47.14}{31} = 7. \quad \frac{125-94}{31} = 7. \end{aligned}$$

4. On voit que le calcul direct est préférable à l'emploi du *critérium*^(iv).

Spa, 28 juin 1890.

(*) En observant que $\rho_1 + \rho_2 = a^2 + b^2$, on abrège, un peu, ce long calcul.

(**) A la p. 132, M. Lucas s'exprime ainsi : « pour que l'équation $ax + by = r$ soit possible en nombres entiers, il faut et il suffit que l'un des nombres $ar - b\rho_1$, $br - a\rho_2$ ne soit pas négatif. » Probablement, le savant Professeur a voulu dire : « il faut et il suffit que les quantités $ar - b\rho_1$, $br - a\rho_2$ (supposées différentes de « zéro »), soient de signes contraires. »

(***) Attribué à Pilatte, mais, peut-être, bien antérieur.

(iv) En supposant $c = n(a + b) + c'$, $x = n - 1 + x'$, $y = n - 1 - y'$, on peut réduire l'équation proposée; mais cette transformation ne paraît pas simplifier le problème.