Article

SUR L´ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ.

in: Mathesis : recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne | Mathesis - 10 | SUR L´ANALYSE INDÉTERMINÉE DU P...

Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library. Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions. Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek
Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Purchase a CD-ROM

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:
Niedersaechisische Staats- und Universitaetsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen, Germany, Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

SUR L'ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ;

par M. E. Catalan.

(*Suite et fin*; voir p. 220-222.)

7. La question qui vient de nous occuper peut être rattachée, de la manière suivante, à la division des polynômes. Si l'on fait

$$X = \frac{(1-x)(1-x^{pq})}{(1-x^p)(1-x^q)},$$

et que l'on suppose les nombres p, q *premiers entre eux*, X est réductible à un polynôme entier(*).

De plus, si l'on prend $x = 2$, X se réduit à

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2^{(p-1)(q-1)}(2^{q-1}-1)-[1+2^p+2^{2p}+\dots+2^{(q-2)p}]}{2^q-1}\\ &=\frac{2^{(q-1)(p-1)}(2^{p-1}-1)-[1+2^q+2^{2q}+\dots+2^{(p-2)q}]}{2^p-1}=\mathrm{N},\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

N *étant un nombre entier*(**).

En outre, si l'on représente par $\varphi(n)$ le nombre des solutions *entières, non négatives*, de l'équation

$$pa + qb = n, \tag{9}$$

on a

$$\mathrm{N} = 1 + 2\varphi(1) + 2^2.\varphi(2) + \dots + 2^{pq-p-q}\varphi(pq-p-q). \tag{10}$$

8. D'après Euler, *tout nombre entier est, d'une seule manière, la somme de plusieurs puissances de* 2(***).

Si donc 2^α est un terme de cette somme,

$$\varphi(\alpha) = +1.$$

Si, au contraire, 2^β n'entre pas dans la composition de N,

$$\varphi(\beta) = 0.$$

(*) *Nouvelles Notes d'Algèbre et d'Analyse* (1889, p. 84). Dans ce Mémoire, nous avons supposé, pour plus de simplicité, p et q *impairs*; mais cette restriction est inutile.

(**) *Loc. cit.*, p. 88.

(***) Autrement dit, un nombre ne peut s'écrire que d'une manière, dans le système de numération binaire.

9. Il est visible que la première expression de N peut être mise sous la forme un peu plus simple :

$$2^{pq-p-q} - \frac{1+2^p+2^{2p}+\cdots+2^{(q-2)p}+2^{pq-p-q}}{2^q-1}.$$

Conséquemment :

$$\frac{1+2^p+2^{2p}+\cdots+2^{(q-2)p}+2^{pq-p-q}}{2^q-1}$$
$$=\frac{1+2^q+2^{2q}+\cdots+2^{(p-2)q}+2^{pq-p-q}}{2^p-1}=\textit{entier}. \qquad (10)$$

10. Soient, par exemple, $p=5$, $q=4$. La première fraction égale

$$\frac{1+2^5+2^{10}+2^{11}}{15}=\frac{1+32+1024+2048}{15}=\frac{3105}{15}=207.$$

La seconde :

$$\frac{1+2^4+2^8+2^{12}+2^{11}}{31}=\frac{1+16+256+4096+2048}{31}=\frac{6417}{31}=207.$$

Par suite,

$$N=2^{11}-207=1841;$$

ou, par la formule (10) :

$$1841=1+2\varphi(1)+2^2\varphi(2)+2^3\varphi(3)+2^4\varphi(4)+2^5\varphi(5)+2^6\varphi(6)+2^7\varphi(7)$$
$$+2^8\varphi(8)+2^9\varphi(9)+2^{10}\varphi(10)+2^{11}\varphi(11).$$

Mais, d'après la remarque d'Euler,

$$1841=1+2^4+2^5+2^8+2^9+2^{10}.$$

Donc, chacune des équations :

$$5x+4y=0,\quad 5x+4y=4,\quad 5x+4y=5,\quad 5x+4y=8,$$
$$5x+4y=9,\quad 5x+4y=10$$

admet une solution *non-négative*. Quant aux équations

$$5x+4y=1,\quad 5x+4y=2,\quad 5x+4y=3,\quad 5x+4y=6,$$
$$5x+4y=7,\quad 5x+4y=11;$$

elles ne peuvent être vérifiées par des nombres entiers.

11. Corollaires. I. *Si p est un nombre entier, non-divisible par* 3 :

$$1+2^p+2^{2p-5}=\mathcal{M}.\ 7;$$

II. *Si p est un nombre entier, non-divisible par* 5 :

$$1+2^p+2^{2p}+2^{3p}+2^{4p-5}=\mathcal{M}.\ 31;$$

III. *Si p est un nombre entier, non-divisible par 7 :*

$$1 + 2^p + 2^{2p} + 2^{3p} + 2^{4p} + 2^{5p} + 2^{6p-7} = \mathcal{M}.\ 127;$$

etc.

Liège. — Août 1890.

VARIÉTÉS.

×Sur les différents systèmes de numération.

« ARISTOTE avait observé que le nombre 4 peut très bien remplacer le nombre 10, comme base de la numération. WEICHEL publia à ce sujet, en 1687, le plan d'une *Arithmétique tétractique*. SIMON STEVIN, de Bruges, mort en 1633, avait aussi imaginé le système de numération duodécimale, se rapprochant beaucoup plus de notre manière de compter les mois de l'année, les heures du jour, les degrés de la circonférence. Quant au système de la numération binaire, auquel nous avons consacré deux Chapitres dans nos *Récréations mathématiques*, il date de cinquante-quatre siècles; il fut retrouvé par LEIBNIZ.

« On peut donc se demander si l'adoption d'une base autre que dix n'eût pas été préférable; en d'autres termes, si l'accident de notre espèce qui fait que nous avons dix doigts aux deux mains, s'accorde avec les conditions requises pour que le système de numération chiffrée soit le plus parfait possible. Ceci exige qu'on distingue la notation des nombres entiers et abstraits de celle des nombres concrets et fractionnaires. Sous le rapport de l'application du système de numération à celui des mesures, et à la subdivision de l'unité concrète, on est convenu, ainsi que BUFFON l'a remarqué, que le nombre *douze*, à cause de ses quatre diviseurs deux, trois, quatre, six, eût été une base plus commode que le nombre dix, qui n'a que deux diviseurs, deux et cinq.

« D'autre part, AUGUSTE COMTE avait remarqué que la structure de la main, composée de quatre doigts à trois phalanges, ou de douze phalanges, permet de représenter avec les deux pouces posés sur deux phalanges, tous les nombres jusqu'à treize fois douze; alors les phalanges de la main gauche représentent des unités simples, et celle de la main droite des *grosses*, ou unités de second ordre. Par suite, on pourrait ainsi compter sur ses phalanges dans le système duodécimal, plus facilement et plus loin que sur ses doigts, dans le système décimal. Mais, si l'on se reporte au *Calcul digital* ignoré de COMTE, cette assertion est inexacte. Au moyen de ce calcul, professé dans les écoles, au temps de CHARLEMAGNE, on représentait avec les doigts des deux mains tous les nombres jusqu'à dix mille.

« Il serait plutôt permis de se demander si le choix d'une base inférieure à dix ne rendrait pas les calculs plus sûrs et plus rapides. En effet, B désignant la base du système de numération, il faut retenir de mémoire les $\frac{1}{2}(B-1)(B-2)$ valeurs différentes de la somme et du produit de deux nombres inégaux, et les $(B-1)$ valeurs des premiers carrés, des premiers cubes. Par conséquent, les premiers frais