

Article

SUR L'ANALYSE INDÉTERMINÉE, DU PREMIER DEGRÉ.

in: Mathesis : recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne | Mathesis - 10 | A PROPOS D'UN PROBLÈME SUR LE B...

Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library. Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions. Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library. For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek
Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Purchase a CD-ROM

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:
Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen, Germany, Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

SUR L'ANALYSE INDÉTERMINÉE, DU PREMIER DEGRÉ();

par M. E. CATALAN.

1. Soit l'équation

$$ax + by = c, \quad (1)$$

à résoudre, s'il est possible, en *nombre entiers positifs*. On suppose, suivant l'usage, a, b, c entiers positifs, premiers entre eux; et les coefficients a, b , premiers entre eux.

Si c et a ont un facteur commun f , ce facteur, premier avec b , doit diviser y . Posant $c = fc', a = fa', y = fy'$, on réduit l'équation (1) à celle-ci :

$$a'x + by' = c'. \quad (2)$$

On peut donc supposer que, dans l'équation (1), les nombres entiers a, b, c sont premiers entre eux, deux à deux.

2. D'après une propriété connue(**), le nombre des solutions non-négatives, de l'équation (1), est égal à l'un des deux quotients entiers de c par ab (***).

Si c était divisible par ab , l'équation (1) serait vérifiée par $x = 0, y = a; x = b, y = 0$. Mais, d'après ce qui précède, cette hypothèse doit être rejetée.

3. Soit q le quotient entier de c par ab , ce quotient étant pris par défaut; de manière que

$$c = abq + c' :$$

c' sera compris entre 0 et ab , exclusivement.

Posons, dans l'équation (1) :

$$x = x' + bq, \quad y = y'.$$

Nous avons à résoudre, en *nombre entiers*, l'équation *auxiliaire*

$$ax' + by' = c'. \quad (3)$$

Celle-ci admet *une solution*(iv), ou n'en admet *aucune*.

(*) Complément à diverses Notes, publiées dans le *Cours de Mathématiques*, par Auguste Blum (1844), les *Nouvelles Annales*, les *Mélanges mathématiques*, *Mathesis*, etc.

(**) Souvent attribuée à Paoli. Où ce Géomètre l'a-t-il publiée?

(***) *Cours de Mathématiques*, d'AUGUSTE BLUM, t. I, p. 473.

(iv) Sous-entendu : en *nombre entiers*, différents de zéro.

4. Soient, s'il est possible,

$$x' = \alpha', \quad y' = \beta',$$

α', β' étant positifs. Une solution de l'équation (1) sera donnée par les formules :

$$\alpha = \alpha' + bq, \quad \beta = \beta';$$

et, d'après la théorie connue, les valeurs générales de x, y sont :

$$x = \alpha' + b(q - \theta), \quad y = \beta' + a\theta. \quad (4)$$

A cause de $c' < ab$, on a :

$$\alpha' < b, \quad \beta' < a. \quad (5)$$

Donc, on peut attribuer à l'indéterminée θ les $q + 1$ valeurs :

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \dots \quad q.$$

Par conséquent : *Si l'équation auxiliaire admet une solution, l'équation primitive en admet $q + 1$. Dans le cas contraire, cette équation primitive admet, seulement, q solutions positives(*).*

5. D'après tout ce qui précède, la question proposée peut être réduite à celle-ci : *Soit l'équation*

$$ax + by = c, \quad (1)$$

les nombres a, b, c étant premiers entre eux, deux à deux, et c étant moindre que ab . Dans quel cas cette équation admet-elle une solution positive ?

Soient

$$x = \alpha, \quad y = \beta \quad (6)$$

une solution particulière. Si α, β sont positifs, ces nombres constituent la solution unique. D'ailleurs, les quantités α, β ne peuvent être négatives à la fois.

Supposons donc, pour fixer les idées,

$$\alpha > 0, \quad \beta < 0.$$

Des formules connues (4), on déduit :

$$\theta < \frac{\alpha}{b}, \quad \theta > -\frac{\beta}{a} (**).$$

(*) *Mélanges mathématiques*, tome I, p. 25.

(**) A cause de

$$ax + b\beta = c,$$

et des hypothèses faites sur a, b, c , chacune de ces fractions est irréductible.

Cela posé, si les limites $\frac{\alpha}{b}$, $-\frac{\beta}{a}$ sont comprises entre deux nombres entiers consécutifs, le nombre entier θ n'existe pas : l'équation (1) n'a pas de solution positive. Dans le cas contraire, elle en admet une; car les deux limites comprennent, entre elles, un nombre entier N.

6. Le moyen le plus simple à employer, pour distinguer ces deux cas, est la résolution directe, par le procédé de Pilatte(*). (A continuer.)

*PARADOXE.

Considérons un cylindre à base circulaire, de rayon R, de hauteur H. Divisons ce cylindre par des plans équidistants, parallèles à la base, en $2n$ tranches égales, de hauteur ($H : 2n$), et considérons l'une de ces tranches. Divisons les deux circonférences de base de cette tranche en $2m$ parties égales, aux points marqués 1, 2, 3, ... $2m$ sur la base inférieure, 1', 2', 3', ..., $(2m)'$ sur la base supérieure. Nous supposons que les couples de points 11', 22', 33', ..., $2m, (2m)'$ correspondants se trouvent sur des génératrices du cylindre. Inscrivons dans la surface de la tranche cylindrique considérée le polyèdre formé par les facettes triangulaires isocèles 12'3, 2'34', 34'5, etc. Ces facettes sont en nombre $2m$; appelons s la surface de l'une d'elles.

Si nous opérons de même dans les $2n$ tranches dont se compose le cylindre total, nous y aurons inscrit, $4mn$ facettes triangulaires isocèles de surface s . Posons

$$S = 4mns,$$

et cherchons la valeur de S en fonction de R, H, m et n .

Pour cela, considérons l'un des triangles, 12'3 par exemple. Si l'on appelle 2'' le point de rencontre du rayon 2C du cylindre avec 13, on voit immédiatement que 2'2'' est la hauteur du triangle 12'3 de base 13. On a donc

$$s = 12'' \times 2'2''.$$

Mais

$$12'' = R \sin 1C2'' = R \sin \frac{2\pi}{2m} = R \sin \alpha,$$

(*) Voir *Mathesis*, août-septembre 1890. Voici ce que j'écrivais, récemment, à M. Hermite : Tous les criteriums possibles ne valent pas la résolution pure et simple de l'équation proposée.