×SUR L'ANALYSE INDÉTERMINÉE, DU PREMIER DEGRÉ(*);

par M. E. CATALAN.

1. Soit l'équation

$$ax + by = c, \tag{1}$$

à résoudre, s'il est possible, en *nombres entiers positifs*. On suppose, suivant l'usage, a, b, c *entiers positifs*, *premiers entre eux*; et les coefficients a, b, *premiers entre eux*.

Si c et a ont un facteur commun f, ce facteur, premier avec b, doit diviser y. Posant $c = fc'$, $a = fa'$, $y = fy'$, on *réduit* l'équation (1) à celle-ci :

$$a'x + by' = c'. \tag{2}$$

On peut donc supposer que, dans l'équation (1), les nombres entiers a, b, c sont *premiers entre eux*, *deux à deux*.

2. D'après une propriété connue(**), *le nombre des solutions non-négatives, de l'équation* (1), *est égal à l'un des deux quotients entiers de* c *par* ab(***).

Si c était divisible par ab, l'équation (1) serait vérifiée par $x = 0$, $y = a$; $x = b$, $y = 0$. Mais, d'après ce qui précède, cette hypothèse doit être rejetée.

3. Soit q le quotient entier de c par ab, ce quotient étant pris par défaut; de manière que

$$c = abq + c' :$$

c' sera compris entre 0 et ab, *exclusivement*.

Posons, dans l'équation (1) :

$$x = x' + bq, \quad y = y'.$$

Nous avons à résoudre, en *nombres entiers*, l'équation *auxiliaire*

$$ax' + by' = c'. \tag{3}$$

Celle-ci admet *une* solution(IV), ou n'en admet *aucune*.

(*) Complément à diverses Notes, publiées dans le *Cours de Mathématiques*, par Auguste Blum (1844), les *Nouvelles Annales*, les *Mélanges mathématiques*, *Mathesis*, etc.

(**) Souvent attribuée à Paoli. Où ce Géomètre l'a-t-il publiée?

(***) *Cours de Mathématiques*, d'AUGUSTE BLUM, t. I, p. 473.

(IV) Sous-entendu : *en nombres entiers*, *différents de zéro*.

4. Soient, s'il est possible,

$$x' = \alpha', \quad y' = \beta',$$

α', β' étant positifs. Une solution de l'équation (1) sera donnée par les formules :

$$\alpha = \alpha' + bq, \quad \beta = \beta';$$

et, d'après la théorie connue, les valeurs générales de x, y sont:

$$x = \alpha' + b(q - \theta), \quad y = \beta' + a\theta. \tag{4}$$

A cause de $c' < ab$, on a :

$$\alpha' < b, \quad \beta' < a. \tag{5}$$

Donc, on peut attribuer à l'indéterminée θ les $q + 1$ valeurs:

$$0, \ 1, \ 2, \ \ldots \ q.$$

Par conséquent : *Si l'équation auxiliaire admet une solution, l'équation primitive en admet* $q + 1$. *Dans le cas contraire, cette équation primitive admet, seulement,* q *solutions positives*(*).

5. D'après tout ce qui précède, la question proposée peut être réduite à celle-ci : *Soit l'équation*

$$ax + by = c, \tag{1}$$

les nombres a, b, c *étant premiers entre eux, deux à deux, et* c *étant moindre que* ab. *Dans quel cas cette équation admet-elle une solution positive?*

Soient

$$x = \alpha, \quad y = \beta \tag{6}$$

une solution *particulière*. Si α, β sont positifs, ces nombres constituent la solution *unique*. D'ailleurs, les quantités α, β ne peuvent être *négatives* à la fois.

Supposons donc, pour fixer les idées,

$$\alpha > 0, \quad \beta < 0.$$

Des formules connues (4), on déduit :

$$\theta < \frac{\alpha}{b}, \quad \theta > -\frac{\beta}{a}(^{**}).$$

(*) *Mélanges mathématiques*, tome I, p. 25.

(**) A cause de

$$a\alpha + b\beta = c,$$

et des hypothèses faites sur a, b, c, *chacune de ces fractions est irréductible.*

Cela posé, *si les limites* $\frac{\alpha}{b}$, $-\frac{\beta}{a}$ *sont comprises entre deux nombres entiers consécutifs, le nombre entier* θ *n'existe pas : l'équation* (1) *n'a pas de solution positive. Dans le cas contraire, elle en admet une;* car les deux limites comprennent, entre elles, un nombre entier N.

6. Le moyen le plus simple à employer, pour distinguer ces deux cas, est la résolution *directe*, par le procédé de Pilatte(*). (*A continuer.*)

×PARADOXE.

Considérons un cylindre à base circulaire, de rayon R, de hauteur H. Divisons ce cylindre par des plans équidistants, parallèles à la base, en $2n$ tranches égales, de hauteur $(H : 2n)$, et considérons l'une de ces tranches. Divisons les deux circonférences de base de cette tranche en $2m$ parties égales, aux points marqués 1, 2, 3,... $2m$ sur la base inférieure, $1', 2', 3', \ldots, (2m)'$ sur la base supérieure. Nous supposons que les couples de points $11'$, $22'$, $33'$,..., $2m$, $(2m)'$ correspondants se trouvent sur des génératrices du cylindre. Inscrivons dans la surface de la tranche cylindrique considérée le polyèdre formé par les facettes triangulaires isoscèles $12'3$, $2'34'$, $34'5$, etc. Ces facettes sont en nombre $2m$; appelons s la surface de l'une d'elles.

Si nous opérons de même dans les $2n$ tranches dont se compose le cylindre total, nous y aurons inscrit, $4mn$ facettes triangulaires isoscèles de surface s. Posons

$$S = 4mns,$$

et cherchons la valeur de S en fonction de R, H, m et n.

Pour cela, considérons l'un des triangles, $12'3$ par exemple. Si l'on appelle $2''$ le point de rencontre du rayon 2C du cylindre avec 13, on voit immédiatement que $2'2''$ est la hauteur du triangle $12'3$ de base 13. On a donc

$$s = 12'' \times 2'2''.$$

Mais

$$12'' = R \sin 1C2'' = R \sin \frac{2\pi}{2m} = R \sin \alpha,$$

(*) Voir *Mathesis*, août-septembre 1890. Voici ce que j'écrivais, récemment, à M. Hermite : Tous les *criteriums* possibles ne valent pas la résolution pure et simple de l'équation proposée.