×NOTES MATHÉMATIQUES.

×**9**. *Sur les nombres parfaits* (Extrait d'une lettre de M. E. CATALAN). Soit $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots l^\delta$; $a, b, c, \dots, l$ étant *premiers, impairs*, et rangés par ordre de grandeur *croissante*. Si N est parfait, on doit avoir, comme l'on sait,

$$\frac{a}{a-1}\,\frac{b}{b-1}\cdots\frac{l}{l-1} > 2, \tag{1}$$

ou

$$\frac{a-1}{a}\,\frac{b-1}{b}\cdots\frac{l-1}{l} < \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Soit $P(l)$ le premier membre de la seconde inégalité. La *Théorie des Nombres*, de Legendre, contient une table des valeurs de $P(l)$, prolongée jusqu'à $l = 1229$ (*). Soit Q_n le produit de n facteurs, choisis parmi

$$\frac{a-1}{a},\quad \frac{b-1}{b},\quad \dots,\quad \frac{l-1}{l}.$$

Il est visible que : 1° le minimum de Q_1 est $P(a) = \frac{a-1}{a} = \frac{2}{3}$; 2° le minimum de Q_2 est $P(b) = \frac{a-1}{a}\cdot\frac{b-1}{b} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} = \frac{8}{15}$; etc. En effet, nous avons :

$$1 - \frac{1}{a} < 1 - \frac{1}{b} < 1 - \frac{1}{c} \dots.$$

Cela posé, considérons un nombre parfait, impair, premier avec 3, 5 et 7. Alors on doit avoir

$$\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{16}{17}\cdots < \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire,

$$P(l) < \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7} \text{ ou } \frac{8}{35} \text{ ou } 0{,}2285\dots$$

D'après la table, cette condition suppose $l \gtreqless 127$.

(*) Le produit $P(l)$ a pour limite zéro (Voir, par exemple, les *Exercices d'Analyse numérique*, par LEBESGUE, p. 138).

En conséquence, *si un nombre* N, *premier avec* 105, *est parfait, il est composé d'au moins vingt-six facteurs premiers, inégaux.*

Le logarithme du produit 11.13.17...109.113 est compris entre 44 et 45. Donc *tout nombre parfait, impair, premier avec* 105, *a au moins quarante-cinq chiffres!*

BIBLIOGRAPHIE.

Exercices de Géométrie analytique et de Géométrie supérieure, par M. J. KOEHLER, répétiteur à l'École polytechnique. Questions et solutions à l'usage des candidats aux écoles polytechnique et normale et à l'agrégation. Deux volumes in-8°, avec figures. — Première partie : Géométrie plane, 1886, VI-347 pages; prix : 9 fr. — Deuxième partie : Géométrie dans l'espace, 1888, 372 pages; prix, 9 fr.

L'auteur a voulu essayer d'introduire en France un recueil de problèmes classiques, basé sur l'exemple déjà suivi en Angleterre où ce genre de livres est très-apprécié depuis longtemps. C'est ainsi que l'ouvrage de M. Wolstenholme, cité et mis à profit par M. Koehler, renferme plus de 2000 exercices ou problèmes donnés aux élèves de l'Université de Cambridge. La publication des solutions développées des questions que propose l'*Educational Times*, donne aussi chaque semestre un recueil fort utile à l'enseignement mathématique de l'Angleterre; il n'est peut-être pas de pays où les problèmes trouvent autant de faveur comme méthode pédagogique. Il y a donc à approuver toute nouvelle tentative dans cette voie, et c'est pourquoi nous croyons devoir appeler l'attention de nos lecteurs sur l'ouvrage que nous venons d'annoncer.

La première partie a été analysée dans *Mathesis*, t. VII, p. 115. La deuxième renferme sept chapitres relatifs à la géométrie de l'espace suivant une progression offrant quelque analogie avec l'ordre adopté dans le premier volume.

I. *Sphère.* 18 questions relatives à des systèmes de sphères.

II. *Cônes et cylindres du second degré.* Propriétés des lignes focales du cône. 38 questions.

III. *Quadriques rapportées à leurs axes.* 26 questions sur les plans tangents, les cônes et les cylindres circonscrits, 24 sur les diamètres et les plans diamétraux conjugués.

IV. *Sections planes des quadriques. Génératrices rectilignes.* 42 questions dans la solution desquelles nous rencontrons un fréquent usage des équations d'une génératrice rectiligne de l'hyperboloïde

$$\frac{x}{a}=\frac{z}{c}\sin\alpha+\cos\alpha,\quad \frac{y}{b}=-\frac{z}{c}\cos\alpha+\sin\alpha,$$

dont la forme est particulièrement avantageuse dans les applications.

V. *Problèmes sur les normales. Propriétés focales des quadriques. Quadriques homofocales.* Important chapitre qui renferme 51 questions.