b) Les droites qui joignent les points de concours des hauteurs des triangles A_1BC, AB_1C, ABC_1, à trois points homologues quelconques se coupent sur la circonférence ABC.

III. Dans la figure précédente, soient α, β, γ les points de rencontre des droites BC_1 et CB_1, AC_1 et CA_1, AB_1 et BA_1. Les trois triangles αBC, $A\beta C$, $AB\gamma$ sont semblables et peuvent être regardés comme se correspondant dans trois figures semblables F_1, F_2, F_3(*). Les points doubles sont A, B, C; les points adjoints, α, β, γ. Le point directeur, situé à l'intersection des droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ est le centre O du cercle circonscrit à ABC, et les points invariables sont les centres I_1, I_2, I_3 des cercles inscrits à αBC, $A\beta C$, $AB\gamma$; car les angles du triangle αBC étant égaux à $\pi - 2A$, $\pi - 2B$, $\pi - 2C$, les bissectrices I_1C, I_1B des angles αCB, αBC sont perpendiculaires à AC, AB, de sorte que A est le centre d'un cercle ex-inscrit à αBC, et $AI_1\alpha$ un diamètre du cercle ABC. Trois droites homologues (par exemple BC, $B\gamma$, βC) forment un triangle inversement semblable à ABC. Trois segments homologues (tels que BC, $B\gamma$, βC) sont inversement proportionnels à cos A, cos B, cos C.

Nous pouvons maintenant énoncer les théorèmes suivants :

a) Trois droites homologues des triangles αBC, $A\beta C$, $AB\gamma$ forment un triangle perspectif avec ABC; le centre de perspective est le point de concours des hauteurs du premier triangle et appartient à la circonférence ABC.

b) Les droites joignant les centres des cercles inscrits aux triangles, αBC, $A\beta C$, $AB\gamma$ à trois points homologues quelconques se coupent sur la circonférence ABC. (*A continuer.*)

VARIÉTÉS (**).

Lettre à M. Charles Brisse.

Mon jeune Camarade,

La préface du livre de M. Jules Tannery, publiée dans le dernier numéro des *Nouvelles Annales*, m'intéresse *personnellement*. En effet, le savant auteur attribue à MM. Bertrand, Cantor, Dedekind, Lipschitz, Heine, etc., relativement aux *limites*

(*) Les triangles αBC, $A\beta C$, $AB\gamma$ sont les triangles *annexes* considérés par M. Catalan, *Mathesis*, t. III, p. 61.

(**) Cette lettre, envoyée il y a près de quatre mois, n'a point encore paru dans les *Nouvelles Annales*. De plus, M. Brisse ne m'a pas même honoré d'un *accusé de réception*. Je me décide donc à recourir à l'hospitalité d'un autre Recueil (E. C.).

La Rédaction de *Mathesis* accueille, bien volontiers, la réclamation de M. Catalan, mais en en laissant la responsabilité à son honorable correspondant.

et aux *incommensura les*, des *idées*, des *définitions* qui, si je ne me trompe fort, *m'appartiennent*. Permettez-moi, dans l'intérêt de la *vérité historique*, de soumettre, aux juges compétents, quelques preuves à l'appui de ma proposition.

I. Dans la première édition des *Éléments de Géométrie* (1843), j'ai défini les mots : *longueur, aire, volume*, et aussi le *rapport* entre *deux grandeurs incommensurables*.

II. La deuxième édition de mon *Manuel d'Arithmétique et d'Algèbre* (1853), et sans doute la première, que je n'ai pas sous la main, contient ceci :

« Dire que $\sqrt{7}$ est *incommensurable*, ce n'est pas définir $\sqrt{7}$. Pendant longtemps, « les arithméticiens ont éludé la difficulté en disant : $\sqrt{7}$ *est une quantité qui,* « *multipliée par elle-même, reproduit* 7. Nous avons fait remarquer, *il y a bien des* « *années*, que cette prétendue définition constitue un cercle vicieux complet : car, « pour savoir ce que signifie l'expression *multiplier par* $\sqrt{7}$, il faudrait avoir « défini $\sqrt{7}$. Nous avons, en même temps, proposé la définition suivante : *La racine* « *carrée de* 7 *est la limite des nombres dont les carrés ont pour limite* 7. Cette manière « d'envisager la *théorie des incommensurables*, repoussée d'abord(*), a été adoptée « depuis (voyez les *Traités d'Arithmétique* de MM. *Briot, Bertrand, Serret*). »

Dans le même petit ouvrage, j'ai donné la *définition du produit de* a—b *par* c—d.

III. C'est dans le *Manuel des candidats à l'École polytechnique* (1857), que j'ai exposé et *développé* mes idées sur les *limites*, les *incommensurables*, le *produit* de A *par* $\sqrt{B}$, etc.

IV. La phrase : « *Nous avons fait remarquer, il y a bien des années* » fait allusion, principalement, à mon cours à l'École préparatoire de Sainte-Barbe, dirigée, vers 1838, par mon ami bien regretté, Étienne Pagès. Mais, *dès* 1836, au collège de Châlons-sur-Marne, j'exposais ces idées *révolutionnaires* (**). Voici un document qui n'a pas été *fabriqué* pour la cause : c'est une lettre *envoyée*, en janvier 1837, à Joseph Liouville, mon illustre maître, lettre dont je viens de retrouver le *brouillon*. J'en extrais ce qui suit :

« Soient a^2, a'^2, a''^2,... des nombres qui ont pour limite un nombre donné A. Si « l'on considère la suite a, a', a'', ..., formée par les racines de ces nombres, ... « *ceux-ci ont une limite : c'est cette limite que j'appelle* $\sqrt{A}$... »

» La racine (carrée) d'un nombre qui n'est pas un carré parfait, est la limite « des quantités dont les carrés ont pour limite le nombre donné »...

« Cette façon de parler ($\sqrt{A}$ *est le nombre qui*, ...) *suppose connue la multipli-* « *cation des quantités incommensurables;* ce qui forme un véritable cercle vicieux. »

V. Dans un beau Rapport sur mes travaux, *lu*, le 7 décembre 1884, à l'Université de Liège, etc. M. Paul Mansion, mon savant collègue et confrère, s'exprime ainsi :

(*) L'analyse de nos *Éléments de Géométrie*, par le professeur Thibault (analyse très bienveillante), contient ces phrases restrictives : « Peut-être trouvera-t-on qu'il « (l'auteur) a été trop loin en introduisant l'idée de limite dans les définitions « mêmes » ;

« Quelques définitions entachées de puritanisme » ; etc.

(**) Le général Appert, ancien ambassadeur à Saint-Pétersbourg, pourrait, au besoin, en témoigner.

« Cela suppose, dira-t-on, toute une théorie préliminaire des nombres incommen-
« surables. Sans doute. Et précisément, au point de vue philosophique, le mérite
« principal de son petit *Manuel d'Arithmétique et d'Algèbre*, c'est d'avoir exposé
« cette théorie, comme il le fallait, il y a trente ans(*), à une époque où personne
« n'y songeait... *Récemment, Heine, Dedekind, Cantor, Lipschitz et, après eux,*
« *beaucoup d'autres, ont développé des idées semblables*, sans se douter, semble-t-il,
« que notre collègue les avait devancés dans son Arithmétique. »

Est-ce clair ?

VI. Si je ne me trompe, M. J. Tannery est beaucoup plus jeune que moi. Il n'y a donc pas lieu de s'étonner qu'il ignore les anciens essais d'un septuagénaire. J'aurais pu lui écrire; mais *je crois savoir, par expérience*, que ma lettre serait restée sans réponse.

Liège, 21 février 1886. Votre bien dévoué très Ancien,

E. CATALAN.

NOTES MATHÉMATIQUES.

12. *Sur les nombres* 111...1. Les renseignements bibliographiques donnés t. IV, p. 38, peuvent être utilement complétés par les indications suivantes : *a*) N. C. M., I, 1874-1875 (1re édition), p. 8-12; IV, 1878, p. 61-63; V. 1879, p. 138-139. — *b*) N. A. M., I, 1843 (E. CATALAN); (2) XVIII, 1879, p. 260-265. — *c*) *Mem. de la Société royale de Liége*; (2) VI, 1877. — *d*) *Zeitschrift* d'Hoffmann, XV, 1884, p. 29 (KESSLER). *e*) *Ann. de Gergonne*, XIX, févr. 1829. p. 256.

On trouve, dans ce dernier Recueil, les énoncés que voici : 1° Tout nombre entier est diviseur d'un nombre exprimé par une suite de 9 suivis de plusieurs zéros. 2° Quel est le plus petit des dénominateurs qui donne des périodes décimales de onze chiffres; ou, en d'autres termes, le nombre 11111111111 a-t-il quelque facteur différent de lui et de l'unité (Voir plus bas, question 528). (H. BROCARD.)

13. *Sur une question de maximum.* L'article de M. Catalan, sur le maximum et le minimum de la fonction $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$, publié au t. II de *Mathesis* (p. 5-7) renferme (p. 6) une note où l'auteur signale un cas exceptionnel sur lequel il aura à revenir.

En préparant une nouvelle édition de ses *Mélanges mathématiques*,

---

(*) Ou, plus exactement, *il y a cinquante ans* (E. C.).