SUR LA COURBE DE WATT(*);

par M. E. CATALAN, professeur à l'Université de Liége.

(*Suite*, voir p. 154.)

IV. REMARQUE. Dans le triangle DOH :

$$\overline{DH}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{OD}^2 - 2OH \cdot OD \sin \omega,$$

ou

$$c^2 = \overline{OH}^2 + a^2 - 2OH \cdot a \sin \omega,$$

ou

$$(\overline{OH}^2 + a^2 - c^2)^2 = 4\,\overline{OH}^2\, a^2 \sin^2 \omega.$$

Et comme

$$\overline{OH}^2 = b^2 - u^2,$$

on a, sans calcul, l'équation (2).

V. Soit I le milieu de l'hypoténuse du triangle HOM (III, 2°). La droite $OI = IH = \frac{1}{2} b$. Par conséquent, la mécanisme indiqué ci-dessus peut être simplifié comme il suit :

Soient trois tiges OI, IH, HD, *articulées en* O, I, H, D, *et dont les deux premières ont même longueur*; *les points* O, D *étant fixes*. *Si la tige* IH *est prolongée en* IM, *de manière que* IM = IH (**), *le point* M *décrit la courbe de* WATT.

VI. Supposons HD = OI = IH (***). Alors OIHD est un quadrilatère dans lequel deux côtés opposés sont égaux. Donc *le point* P, *milieu de* IH, *décrit une courbe de* WATT.

VII. Enfin, si l'on considère la figure formée de l'*heptagone articulé* ALKOIHD (****) et du *parallélogramme articulé* OKMI, les points A, O, D étant fixes, on voit que *le point* M, *et les milieux* P, R, *de*

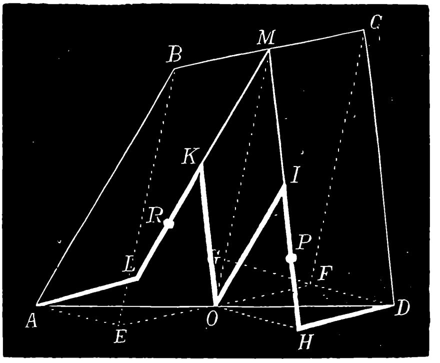
(*) L'équation (I) renferme une faute typographique. Au lieu de $\sqrt{c^2 - a^2 \cos \omega}$, on doit lire $\sqrt{c^2 - a^2 \cos^2 \omega}$.

(**) Plus exactement, HM est une tige, double de OI, articulée en son milieu I et en son extrémité H.

(***) C'est-à-dire $c = \frac{1}{2} b$. La figure ne réalise pas exactement cette hypothèse.

(****) Tous les côtés de cet heptagone, excepté AD, sont égaux.

IH, KL, *décrivent des courbes de* WATT. De plus, *les deux dernières lignes, égales entre elles, sont semblables à la première.*



En effet, pour passer de ABCD à chacun des quadrilatères ALKO, OIHD, on doit changer a en $\frac{a}{2}$, b en $\frac{b}{2}$.

VIII. Le Lemme équivaut à ces deux propositions de Géométrie élémentaire, que je crois peu connues :

1° *Si deux côtés opposés d'un quadrilatère sont égaux, la médiane des deux autres côtés est parallèle à la bissectrice de l'angle formé par les côtés égaux.*

2° *Si, sur les côtés* AB, AC *d'un triangle* ABC, *on prend les distances* BD, CE *égales entre elles*; *le lieu géométrique du milieu de la droite* DE *est la parallèle à la bissectrice de l'angle* A, *menée par le milieu du plus petit des côtés* AB, AC.

NOTES MATHÉMATIQUES.

×**6**. *Sur la question* 421. (Voir *Mathesis*, V, pp. 69, 191). (Extrait d'une lettre d'un abonné.) On a, dans un triangle ABC, dont l'aire est T, le périmètre $2p$,

$$\sin A = \frac{2T}{bc}, \ \sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}; \ \sin B = \text{etc.}$$

Donc l'égalité à vérifier devient

$$\frac{(p-b)(p-c)}{bc} + \frac{(p-c)(p-a)}{ca} + \frac{(p-a)(p-b)}{ab} = \frac{(p-a)^2}{bc} + \frac{(p-b)^2}{ca} + \frac{(p-c)^2}{ab},$$

ou

$$a(p-b)(p-c) + b(p-c)(p-a) + c(p-a)(p-b) = a(p-a)^2 + b(p-b)^2 + c(p-c)^2,$$