

Article

SUR LES OMBILICS DES SURFACES.

Catalan, E.

in: Mathesis : recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne | Mathesis - 5 | SUR LES OMBILICS DES SURFACES. ...

## Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions. Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

### **Contact:**

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek  
Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

### **Purchase a CD-ROM**

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen, Germany, Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

SUR LES OMBILICS DES SURFACES;

par E. CATALAN, professeur à l'Université de Liège.

La condition d'égalité entre les rayons principaux  $R_1, R_2$  est, comme on sait(\*),

$$[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]^2 + 4(s^2 - rt)(1 + p^2 + q^2) = 0. \quad (1)$$

Poisson démontre que le premier nombre est la somme de deux carrés; mais la méthode employée par l'illustre Géomètre, très ingénieuse, est assez pénible(\*\*). Voici comment on peut la modifier.

I. Écrivons ainsi l'équation (1) :

$$4As^2 + 4Bs + C = 0, \quad (2)$$

en posant :

$$A = (1 + p^2)(1 + q^2), \quad (3)$$

$$B = -pq[(1 + q^2)r + (1 + p^2)t], \quad (4)$$

$$C = [(1 + q^2)r + (1 + p^2)t]^2 - 4rt(1 + p^2 + q^2) \\ = (1 + q^2)^2 r^2 + 2[(1 + p^2)(1 + q^2) - 2(1 + p^2 + q^2)]rt + (1 + p^2)^2 t^2,$$

ou

$$C = (1 + q^2)^2 r^2 + 2[p^2 q^2 - (1 + p^2 + q^2)]rt + (1 + p^2)^2 t^2. \quad (5)$$

De l'équation (2), on tire

$$2s = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \quad (6)$$

Or,

$$B^2 - AC = p^2 q^2 (1 + q^2)^2 r^2 + 2p^2 q^2 (1 + q^2)(1 + p^2)rt + p^2 q^2 (1 + p^2)^2 t^2 \\ - (1 + p^2)(1 + q^2)^5 r^2 - 2(1 + p^2)(1 + q^2)[p^2 q^2 - (1 + p^2 + q^2)]rt \\ - (1 + p^2)^5 (1 + q^2) t^2 = -(1 + p^2 + q^2)(1 + q^2)^2 r^2 \\ + 2(1 + p^2)(1 + q^2)(1 + p^2 + q^2)rt - (1 + p^2 + q^2)(1 + p^2)^2 t^2,$$

ou

$$B^2 - AC = -(1 + p^2 + q^2)[(1 + q^2)r - (1 + p^2)t]^2, \quad (7)$$

quantité *négative* ou *nulle*.

(\*) Voir, par exemple, l'*Analyse appliquée à la Géométrie des trois dimensions*, par LEROY; p. 330.

(\*\*) *Loc. cit.* On doit observer que, la surface donnée étant *convexe*, la binôme  $s^2 - rt$  est *négatif*.

II. Les valeurs de  $s$  étant *imaginaires*, à moins que  $B^2 - AC = 0$ , le premier membre de l'équation (2) est une somme de deux carrés. Cette équation équivaut à

$$(2As + B)^2 - (B^2 - AC) = 0. \quad (8)$$

Elle se décompose en

$$B^2 - AC = 0, \quad s = -\frac{B}{2A};$$

ou

$$(1 + q^2)r = (1 + p^2)t, \quad s = \frac{pqr}{1 + p^2}.$$

Donc,

$$\frac{r}{1 + p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1 + q^2}; \quad (9)$$

équations des ombilics.

III. REMARQUE. D'après ce qui précède, on a, *identiquement*,

$$\begin{aligned} & (1 + p^2)(1 + q^2)[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]^2 \\ & + 4(1 + p^2)(1 + q^2)(1 + p^2 + q^2)(s^2 - rt) \\ = & \{2(1 + p^2)(1 + q^2)s - pq[(1 + q^2)r + (1 + p^2)t]\}^2; \end{aligned}$$

ou, par un changement de lettres :

$$\begin{aligned} & (a^2 + c^2)(b^2 + c^2)[(x + aby)^2 + (u^2 + b^2 + c^2)c^2y^2] \\ = & [abx + (a^2 + c^2)(b^2 + c^2)y]^2 + (a^2 + b^2 + c^2)c^2x^2. \end{aligned}$$

IV. AUTRE REMARQUE. Dans cette identité, dont la vérification est facile, le premier membre, développé, est une somme de *seize* carrés; et le second membre, une somme de *quatre* carrés. La théorie des surfaces peut donc, comme la théorie des courbes, être appliquée à l'arithmétique(\*).

## NOTES MATHÉMATIQUES.

2. VOLUME D'UN PRISMATOÏDE (Voir p. 9-10). *Le volume V d'un solide terminé par deux bases parallèles et tel qu'une section, faite parallèlement à la base inférieure  $B_0$  à la distance  $x$ , ait une aire  $u = ax^5 + bx^2 + cx + g$ , a pour expression,  $V = \frac{1}{6}h(B_0 + 4C + B_1)$ ,  $h$  représentant la distance entre les deux bases  $B_0$  et  $B_1$ , et  $C$  une section équidistante des deux bases.*

(\*) Voir, par exemple, N. C. M., 1877, t. III, p. 24. Comparer sur la question des ombilics : *N. A. M.*, 1866, (2) V, 354 (Mister et Neuberg); *Journal de Crelle*, t. 64, p. 187 (Henrici); t. 67, p. 320 (Souillart).