SUR LES OMBILICS DES SURFACES;

par E. CATALAN, professeur à l'Université de Liége.

La condition d'égalité entre les rayons principaux R_1, R_2 est, comme on sait (*),

$$[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2+4(s^2-rt)(1+p^2+q^2)=0. \quad (1)$$

Poisson démontre que le premier nombre est la somme de deux carrés; mais la méthode employée par l'illustre Géomètre, très ingénieuse, est assez pénible (**). Voici comment on peut la modifier.

I. Écrivons ainsi l'équation (1) :

$$4As^2+4Bs+C=0, \quad (2)$$

en posant :

$$A=(1+p^2)(1+q^2), \quad (3)$$

$$B=-pq[(1+q^2)r+(1+p^2)t], \quad (4)$$

$$C=[(1+q^2)r+(1+p^2)t]^2-4rt(1+p^2+q^2)$$
$$=(1+q^2)^2r^2+2[(1+p^2)(1+q^2)-2(1+p^2+q^2)]rt+(1+p^2)^2t^2,$$

ou

$$C=(1+q^2)^2r^2+2[p^2q^2-(1+p^2+q^2)]rt+(1+p^2)^2t^2. \quad (5)$$

De l'équation (2), on tire

$$2s=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-AC}}{A}. \quad (6)$$

Or,

$$B^2-AC=p^2q^2(1+q^2)^2r^2+2p^2q^2(1+q^2)(1+p^2)rt+p^2q^2(1+p^2)^2t^2$$
$$-(1+p^2)(1+q^2)^3r^2-2(1+p^2)(1+q^2)[p^2q^2-(1+p^2+q^2)]rt$$
$$-(1+p^2)^3(1+q^2)t^2=-(1+p^2+q^2)(1+q^2)^2r^2$$
$$+2(1+p^2)(1+q^2)(1+p^2+q^2)rt-(1+p^2+q^2)(1+p^2)^2t^2,$$

ou

$$B^2-AC=-(1+p^2+q^2)[(1+q^2)r-(1+p^2)t]^2, \quad (7)$$

quantité *négative* ou *nulle*.

(*) Voir, par exemple, l'*Analyse appliquée à la Géométrie des trois dimensions*, par LEROY; p. 330.

(**) *Loc. cit.* On doit observer que, la surface donnée étant *convexe*, la binôme s^2-rt est *négatif*.

II. Les valeurs de s étant *imaginaires*, à moins que $B^2 - AC = 0$, le premier membre de l'équation (2) est une somme de deux carrés. Cette équation équivaut à

$$(2As + B)^2 - (B^2 - AC) = 0. \tag{8}$$

Elle se décompose en

$$B^2 - AC = 0, \quad s = -\frac{B}{2A};$$

ou

$$(1 + q^2)r = (1 + p^2)t, \quad s = \frac{pqr}{1 + p^2}.$$

Donc,

$$\frac{r}{1 + p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1 + q^2}; \tag{9}$$

équations des ombilics.

III. Remarque. D'après ce qui précède, on a, *identiquement*,

$$\begin{aligned} &(1 + p^2)(1 + q^2)[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]^2 \\ &\quad + 4(1 + p^2)(1 + q^2)(1 + p^2 + q^2)(s^2 - rt) \\ &= \{2(1 + p^2)(1 + q^2)s - pq[(1 + q^2)r + (1 + p^2)t]\}^2; \end{aligned}$$

ou, par un changement de lettres :

$$\begin{aligned} &(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)[(x + aby)^2 + (a^2 + b^2 + c^2)c^2y^2] \\ &= [abx + (a^2 + c^2)(b^2 + c^2)y]^2 + (a^2 + b^2 + c^2)c^2x^2. \end{aligned}$$

IV. Autre remarque. Dans cette identité, dont la vérification est facile, le premier membre, développé, est une somme de *seize* carrés; et le second membre, une somme de *quatre* carrés. La théorie des surfaces peut donc, comme la théorie des courbes, être appliquée à l'arithmétique(*).

NOTES MATHÉMATIQUES.

2. Volume d'un prismatoïde (Voir p. 9-10). *Le volume* V *d'un solide terminé par deux bases parallèles et tel qu'une section, faite parallèlement à la base inférieure* B_0 *à la distance* x, *ait une aire* $u = ax^3 + bx^2 + cx + g$, *a pour expression*, $V = \frac{1}{6}h(B_0 + 4C + B_1)$, h *représentant la distance entre les deux bases* B_0 et B_1, *et* C *une section équidistante des deux bases.*

(*) Voir, par exemple, N. C. M., 1877, t. III, p. 24. Comparer sur la question des ombilics : *N. A. M.*, 1866, (2) V, 354 (Mister et Neuberg); *Journal de Crelle*, t. 64, p. 187 (Henrici); t. 67, p. 320 (Souillart).