SUR UN THÉORÈME D'ABEL;

par E. Catalan, professeur à l'Université de Liège.

I.

Le théorème de l'illustre Norwégien a été ainsi énoncé par l'auteur : « si la série

$$f(\alpha) = v_0 + v_1 \alpha + v_2 \alpha^2 + \cdots + v_m \alpha^m + \cdots$$

« est convergente pour une certaine valeur δ de α, elle sera aussi convergente pour toute valeur moindre de α, et, pour des valeurs toujours « décroissantes de β, la fonction $f(\alpha - \beta)$ s'approche indéfiniment de la « limite $f(\alpha)$, supposé que α soit égal ou inférieur à δ (*). »

II.

En 1862 parut, dans le *Journal de Mathématiques*, une Note ayant pour titre : *Démonstration d'un théorème d'Abel*; *Note de M. Lejeune-Dirichlet, communiquée par M. Liouville.* Voici le commencement et la fin de cette Note :

« Il s'agit de prouver que si la série

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

« est convergente et a pour somme A, la somme de la série

$$a_0 + a_1 \rho + a^2 \rho^2 + \cdots + a_n \rho^n + \cdots$$

« qui sera convergente à fortiori en prenant la variable ρ positive « et < 1, tendra vers la limite A lorsque l'on fera tendre indéfiniment « ρ vers l'unité (**). Causant un jour avec mon excellent et si regrettable « ami Lejeune-Dirichlet, je lui disais que je trouvais assez difficile à « exposer (et même à comprendre)(***) la démonstration qu'Abel a donnée « de ce théorème important. Dirichlet se mit sur-le-champ à écrire sous

---

(*) *Œuvres d'Abel*, première édition, tome I, p. 69; deuxième édition, p. 223.

(**) Ces six lignes sont, pour ainsi dire, la traduction du texte d'Abel, rapporté ci-dessus.

(***) Ici, je suis complètement d'accord avec *mon excellent et si regrettable ami* Liouville. (E. C.)

« mes yeux, dans le seul but de me venir en aide, la Note ci-après, qui « m'a été d'un grand secours et qu'on me saura gré de livrer au public. « Le mode de démonstration qu'on y trouve comporte de nombreuses « applications.

. . . .

« Je ne pense pas que personne puisse songer désormais à demander de « nouveaux éclaircissements. »

III.

L'article du *Journal de Mathématiques* provoqua la lettre suivante, qui n'a jamais été publiée. Elle ne le serait pas encore aujourd'hui, si je ne la croyais propre à provoquer la discussion sur une partie, assez obscure, de la théorie des séries. Sauf peut-être en un seul point, mes opinions, touchant le théorème d'Abel et la démonstration de Dirichlet, n'ont pas varié. Ceci dit, voici la lettre :

« Mon cher M. Liouville,

« Votre numéro d'Août, que je reçois ce soir, me jette en de terribles « perplexités : d'un côté, le Théorème d'Abel me semble *évident*; de l'autre, « la démonstration de Dirichlet exige, si je ne me trompe, *de nouveaux* « *éclaircissements* : je veux dire qu'elle est bien compliquée. Accordez- « moi, pour chacun de ces deux points, trois minutes d'attention.

« 1° Si une série

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots \qquad (1)$$

« est convergente pour toutes les valeurs positives de x qui ne dépassent « pas une certaine quantité b, de façon que, pour chacune de ces valeurs, « *la somme de la série* (c'est-à-dire la limite vers laquelle tend la somme « de ses n premiers termes, quand n augmente indéfiniment) soit $F(x)$; « peut-on révoquer en doute l'exactitude de l'équation

$$a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + a_3 b^3 + \cdots = F(b)?$$

« Autrement dit, peut-on contester celle-ci :

$$« \ lim\, F(x) = F\{lim\, x\} = F(b)?$$

« 2° Quoi qu'il en soit, si le Théorème d'Abel a besoin d'être démontré

« (ce que je ne puis me persuader), voici un essai de démonstration (*).

. . . .

« Soient $f_n(x)$ la somme des n premiers termes de la série (1), $\varphi_n(x)$
« le *reste* : cette dénomination est permise, puisque la série est conver-
« gente. On aura

$$« F(x) = f_n(x) + \varphi_n(x). \tag{2}$$

« Dans les deux membres, faisons tendre x vers b : la limite du premier
« membre, étant égale à la somme des limites des deux parties qui
« composent le second, on aura encore

$$« F(b) = f_n(b) + \varphi_n(b)(**). \tag{3}$$

« Maintenant, faisons croître n indéfiniment : d'après l'hypothèse, le
« terme $f_n(b)$ tend vers une certaine limite B ; le terme $\varphi_n(b)$ tend vers
« zéro (***). D'ailleurs F (b), ne contenant pas n, n'a pas changé ; donc
« enfin

$$« F(b) = B. \tag{4}$$

« Votre bien affectionné et dévoué ancien élève,

E. Catalan.

Paris, 23 janvier 1863 (9 h. ½).

« P. S. En relisant mon 2°, je m'aperçois qu'il n'ajoute rien à l'évi-
« dence que je crois reconnaître dans le Théorème en question ; et,
« malgré moi, je pense aux gens difficiles qui voudraient démontrer ce
« *postulatum*, moins célèbre que celui d'Euclide :

« *Deux points* C, D, *étant situés de part et d'autre d'une droite indéfinie*
« AB ; *la droite qui joint ces deux points coupe nécessairement* AB. »

IV.

Dans certains cas *très rares, la somme* désignée par $f_n(b)$ *est indépendante de* n : cette somme est une simple *constante*. Par suite, le *reste* $\varphi_n(b)$ se réduit, aussi, à une *constante*. L'égalité (3), prenant la forme

$$F(b) = B + C, \tag{5}$$

(*) Ici, trois lignes étrangères à l'objet en litige, et que, par ce motif, je supprime. (E. C.)

(**) Selon nous, ceci revient à admettre que $\varphi_n(x)$ et, par suite, que F (x) est fonction continue de x (P. M.)

(***) Voir le paragraphe IV.

le raisonnement employé ci-dessus n'est plus applicable; et la formule (4) se change en la dernière (*).

Soit, par exemple, la série

$$\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots,$$

citée par Abel (**). Pour toutes les valeurs de x, inférieures à π, on a, comme l'a trouvé Fourier (***), $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}x$. En même temps,

$$f_n(x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots \pm \frac{1}{n}\sin nx.$$

Mais, lorsque $x = \pi$, la dernière somme s'annule : elle est donc *indépendante* de n. Aussi la formule (4), *appliquée mal à propos*, donne-t-elle ce résultat absurde :

$$\frac{\pi}{2} = 0.$$

PRÉCIS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS HYPERBOLIQUES.

(*Suite;* voir pages 5-13).

×II. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE.

12. *Fonctions circulaires.* Dans l'équation $x^2 + y^2 = 1$ du cercle de rayon égal à l'unité, posons

$$y = \sin\theta,$$

pour un point quelconque m, θ étant une variable auxiliaire; on aura

$$x = \cos\theta.$$

La tangente au point m, ayant pour équation $\mathrm{X}x + \mathrm{Y}y = 1$, a pour coordonnées à l'origine :

$$\mathrm{X} = \frac{1}{x} = \text{séc}\,\theta,\quad \mathrm{Y} = \frac{1}{y} = \text{coséc}\,\theta.$$

(*) Si je ne me trompe, cette remarque, sur laquelle je reviendrai peut-être, rend compte de certaines difficultés, bien connues, que présentent les séries *périodiques*.

(**) *Œuvres*, tome II, p. 267.

(***) *Théorie de la Chaleur*, p. 238.