

Article

## QUESTIONS DE MATHÉMATIQUES ÉLÈMENTAIRE DE M. E.

CATLAN.

in: Mathesis : recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne | Mathesis - 3

### Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library. Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions. Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library. For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

### **Contact:**

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek  
Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen  
Germany  
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

### **Purchase a CD-ROM**

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen, Germany, Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

\*QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE  
DE M. E. CATALAN (\*).

Ces théorèmes pouvant intéresser les lecteurs de *Mathesis*, nous allons en donner une analyse succincte.

1<sup>o</sup> Soit ABC un triangle quelconque, que nous supposerons, pour plus de simplicité, acutangle. Construisons les symétriques M, N, P des sommets A, B, C, relativement aux côtés BC, CA, AB, et désignons par A', B', C' les intersections des droites BP et CN, CM et AP, AN et BM. Les triangles A'BC, B'CA, C'AB peuvent être appelés *annexes* de ABC.

On voit immédiatement que *les angles des triangles A'BC, AB'C, ABC' sont égaux à  $\pi - 2A$ ,  $\pi - 2B$ ,  $\pi - 2C$ .* Par conséquent, *les annexes de ABC sont semblables au triangle A'B'C, qui a pour côtés les tangentes menées par A, B, C au cercle ABC.*

2<sup>o</sup> Soit O le centre du cercle ABC. Les angles BOC, COA, AOB, égaux à  $2A$ ,  $2B$ ,  $2C$  sont les suppléments de A', B', C', donc les *circonférences circonscrites aux annexes passent par O*. L'angle AOC est le supplément de l'angle A'BC qui, à cause du quadrilatère inscriptible A'BOC, est égal à A'OC; AOA' est donc une ligne droite : *les droites AA', BB', CC' se coupent aussi au point O.*

3<sup>o</sup> AB et AC étant les bissectrices des angles CBP, BCP, A est le centre d'un cercle exinscrit à l'annexe A'BC. Soit  $\alpha$  le point de la circonference O, diamétralement opposé à A; les droites  $\alpha B$ ,  $\alpha C$ , perpendiculaires à AB, AC sont les bissectrices des angles B, C du triangle A'BC. Donc les centres des cercles inscrits aux annexes sont à l'intersection de la circonference ABC par les droites AA', BB', CC'.

4<sup>o</sup> Des 2<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup>, on déduit deux nouvelles constructions de l'annexe A'BC : 1<sup>o</sup> Le sommet A' est à l'intersection de la circonference BOC et de la droite AO; 2<sup>o</sup> les côtés A'B, A'C sont les tangentes menées par B et C à la circonference qui touche BC et qui a pour centre le point  $\alpha$ , diamétralement opposé à A sur la circonference ABC.

5<sup>o</sup> La circonference A'BC passe par A<sub>1</sub>, et OA<sub>1</sub> en est un diamètre; par suite, la droite A<sub>1</sub>A', perpendiculaire à A'A, est parallèle à B,C<sub>1</sub> et

---

(\*) Extrait des *Bulletins de l'Académie Royale de Belgique*, 1882.

bissectrice extérieure de l'angle  $CA'B$ . Il résulte de là que *les centres de deux cercles exinscrits à l'annexe  $A'BC$  sont à l'intersection de  $AB$  et  $AC$  par  $A'A_1$  parallèle à  $B_1C_1$ .*

6° De ce que  $A'A_1$  est parallèle  $B_1C_1$ , on conclut que *les droites  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  sont égales aux hauteurs du triangle  $A_1B_1C_1$ .* La circonference  $O$  étant inscrite à  $A_1B_1C_1$ , un théorème connu donne la relation (\*)

$$\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} = \frac{1}{OA}. \quad (1)$$

7° Supposons le cercle  $O$  fixe et le triangle  $ABC$  variable. Alors :

a) Si la corde  $BC$  est fixe,  $A'$  décrit une circonference; b) si  $A$  est fixe,  $A'$  parcourt la droite  $AO$ ; c) enfin, si  $A$  et  $A'$  sont fixes, la corde  $BC$  tourne autour d'un point fixe  $I$  de la droite  $AA'$ . La dernière propriété peut se déduire de l'égalité

$$R^2 = OA' \cdot OI,$$

qui résulte de la similitude des triangles  $OBI$ ,  $OA'B$ .

8° Les diagonales de l'hexagone  $A'CB'AC'B$  se coupent au point  $O$ . Donc *cet hexagone est circonscrit à une conique* (Théorème de Brianchon).

Les triangles  $ABC$ ,  $A'B'C'$  étant homologiques, leurs côtés correspondants se coupent sur une même droite; donc *les côtés non homologues se coupent en six points d'une même conique* (Théorème de Pascal).

---

M Lepaige nous communique la généralisation suivante d'une partie des 2° et 8°. Soient  $M$ ,  $N$ ,  $P$  trois points *quelconques* pris sur les droites *quelconques*  $AH$ ,  $BH$ ,  $CH$ ; l'hexagone  $BMCNAP$  dont les diagonales se coupent en un même point, est circonscrit à une conique. L'hexagone  $BA'CB'AC'$ , formé comme au 1°, a les mêmes côtés que  $BMCNAP$ ; donc les diagonales  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  passent par un même point. De même, les droites  $MA'$ ,  $NB'$ ,  $PC'$  concourent en un même point.

Le 2° est aussi un cas particulier de la proposition suivante que nous avons signalée dans la *Nouvelle correspondance*, t. I, p. 112 : Sur les côtés d'un triangle  $ABC$ , on construit extérieurement les triangles  $A'BC$ ,  $AB'C$ ,  $ABC'$  semblables à un même triangle  $A_1B_1C_1$ ; les circonférences circonscrites à ces triangles, et les droites  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  se coupent en

---

(\*) Cette démonstration, qui diffère de celle de M. Catalan, précise le caractère de la relation (1).

un même point d'où l'on voit les côtés de ABC sous les angles  $\pi - A_1$ ,  $\pi - B_1$ ,  $\pi - C_1$ .

Voici un complément de cette proposition, qui nous a été suggéré par la note de M. Catalan : Les droites AA', BB', CC' rencontrent la circonference ABC en trois points  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , d'où l'on voit les côtés des triangles A'BC, AB'C, ABC' sous les angles  $\pi - A$ ,  $\pi - B$ ,  $\pi - C$ .

Connaissant les points A', B', C' et les angles A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub>, on peut retrouver le triangle ABC. Comment résoudre la question analogue pour la figure considérée par M. Catalan, c'est-à-dire comment retrouver le triangle ABC, connaissant les sommets A', B', C' des annexes, ou les symétriques M, N, P des sommets A, B, C relativement aux côtés opposés?

J. NEUBERG.

### SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES (\*).

#### +Question 149.

(Voir t. II, p. 144.)

On dispose la suite des nombres naturels de la manière suivante :

1,  
2, 3, 4,  
5, 6, 7, 8, 9,  
.....

Démontrer que la somme des nombres d'une horizontale quelconque est la somme de deux cubes consécutifs. (DE ROCQUIGNY.)

Cette question a été résolue par MM. Lambert, élève du collège de St Trond; Deru, élève de l'institut Postula (Liège); Polet, élève du collège de Huy; Servais et Prevost, élèves de l'école normale des sciences; J. Gillet, E. Cesáro, P. Bastin, Schoentjes, Rochetti et Pisani.

On peut résumer ces solutions comme il suit. Les  $(n - 1)$  premières horizontales renferment un nombre de termes exprimé par

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 3) = (n - 1)^2.$$

La  $n^{\text{e}}$  horizontale forme donc une progression arithmétique de  $(2n - 1)$

(\*) Rectification : Le théorème empirique de M. Catalan, cité page 42, ligne 9, a été démontré pour le cas invoqué dans la solution 82, et même dans des cas plus généraux, par M. Gerono (N. A., 2<sup>e</sup> série, t. IX, p. 469-471, t. X, p. 204-206). Nous reviendrons sur cette question.