surface gauche (BRIOT et BOUQUET, *Géométrie analytique*, 6e édition, Livre V, ch. IV, nos 477-480). Mais la démonstration purement géométrique du théorème de Chasles est peut satisfaisante et quand on l'établit par l'analyse il vaut mieux le déduire du théorème de Hachette.

Nous reviendrons, dans un prochain numéro, sur ce théorème et nous ferons connaître diverses conséquences remarquables du procédé de démonstration de M. Chomé. (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES (*).

×Question 65.

(Voir t. I, p. 136.)

Soient r, R l'apothème et le rayon d'un polygone régulier. Si ρ est le rayon de la circonférence isopérimètre avec ce polygone, on a

$$\frac{1}{3}(r + 2R) > \rho > \sqrt[3]{rR^2}. \qquad \text{(E. Catalan.)}$$

LEMME I. *Soient trois séries à termes positifs :*

$$a,\ b,\ u_3,\ u_4, \dots\ u_n, \dots,$$

$$a,\ b,\ v_3,\ v_4, \dots\ v_n, \dots,$$

$$a,\ b,\ U_3,\ U_4, \dots\ U_n, \dots$$

dans lesquelles :

$$u_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n-2}), \qquad v_n = \sqrt{v_{n-1}v_{n-2}},$$

$$U_3 = \frac{1}{2}(a + b), \quad U_4 = \sqrt{U_3 b}, \quad U_5 = \frac{1}{2}(U_4 + U_3), \quad U_6 = \sqrt{U_5 U_4}, \dots$$

On aura, généralement :

$$u_n > U_n > v_n. \tag{1}$$

Le calcul direct donne

$$u_3 = U_3 > v_3, \qquad u_4 > U_4 > v_4.$$

Supposons donc que l'on ait trouvé

$$u_{n-2} > U_{n-2} > v_{n-2}, \tag{2}$$

$$u_{n-1} > U_{n-1} > v_{n-1}, \tag{3}$$

(*) Nous avons omis de mentionner dans le no précédent des solutions des questions 46 et 47, par M. H. Brocard. M. F. Pisani nous a aussi envoyé une solution des questions de M. Dostor, posées page 157-158 du tome I de *Mathesis*.

et voyons si la double inégalité (1) est une conséquence de celles-ci.

Il résulte, de ces dernières inégalités :

$$\frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n-2}) > \frac{1}{2}(U_{n-1} + U_{n-2}) > \frac{1}{2}(v_{n-1} + v_{n-2}),$$

$$\sqrt{u_{n-1}\, u_{n-2}} > \sqrt{U_{n-1}\, U_{n-2}} > \sqrt{v_{n-1}\, v_{n-2}};$$

ou, par un théorème connu (*) :

$$u_n > \frac{1}{2}(U_{n-1} + U_{n-2}) > \frac{1}{2}(v_{n-1} + v_{n-2}) > v_n,$$

$$u_n > \sqrt{U_{n-1}\, U_{n-2}} > v_n;$$

donc, dans les deux cas possibles :

$$u_n > U_n > v_n.$$

LEMME II. *Si n croît indéfiniment,*

$$\lim u_n = \frac{1}{3}(a + 2b). \qquad (3)$$

D'après la méthode générale (**)

$$u_n = A\alpha^n + B\beta^n,$$

A, B, étant des *constantes*, et α, β les racines de l'équation

$$2x^2 - x - 1 = 0;$$

savoir, $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{2}$. Ainsi

$$u_n = A + B\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Les valeurs des constantes sont données par les conditions

$$a = A - \frac{1}{2}B, \quad b = A + \frac{1}{4}B.$$

Donc

$$A = \frac{1}{3}(a + 2b), \quad B = \frac{4}{3}(b - a),$$

(*) La moyenne arithmétique, entre deux nombres, surpasse leur moyenne géométrique.

(**) Pour trouver le terme général d'une série récurrente. On peut aussi vérifier la formule $u_n = A\alpha^n + B\beta^n$, de proche en proche. Voir d'ailleurs plus bas, p. 89, une démonstration géométrique du lemme II (P. M.)

puis

$$u_n = \frac{1}{3}(a + 2b) + \frac{1}{3}(b - a)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2};$$

etc.

LEMME III. *Si n croît indéfiniment,*

$$\lim v_n = \sqrt[3]{ab^2}.$$

La relation

$$v_n = \sqrt{v_{n-1}\, v_{n-2}}$$

donne

$$\log v_n = \frac{1}{2}(\log v_{n-1} + \log v_{n-2}).$$

Or, par le Lemme II :

$$\lim \log v_n = \log (\lim v_n) = \frac{1}{3}(\log a + 2 \log b) = \frac{1}{3}\log (ab^2) = \log \sqrt[3]{ab^2};$$

donc

$$\lim v_n = \sqrt[3]{ab^2}.$$

THÉORÈME. *Soient r, R l'apothème et le rayon d'un polygone régulier. Si ρ est le rayon de la circonférence isopérimètre avec ce polygone, on a*

$$\frac{1}{3}(r + 2\mathrm{R}) > \rho > \sqrt[3]{r\mathrm{R}^2}.$$

Dans les formules précédentes, supposons

$$a = r, \quad b = \mathrm{R}.$$

D'après la *Méthode de Descartes,*

$$\rho = \lim \mathrm{U}_n.$$

Il résulte d'ailleurs des lemmes ci-dessus :

$$\lim u_n > \lim \mathrm{U}_n > \lim v_n,$$

$$\frac{1}{3}(r + 2\mathrm{R}) > \lim \mathrm{U}_n > \sqrt[3]{r\mathrm{R}^2};$$

ou enfin

$$\frac{1}{3}(r + 2\mathrm{R}) > \rho > \sqrt[3]{r\mathrm{R}^2}.$$

REMARQUE. Soient

$$r_1, r_2, \ldots r_n,$$

$$\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \ldots \mathrm{R}_n$$

les apothèmes et les rayons des polygones réguliers, isopérimètres, obtenus par la construction de Descartes. On a, par la proposition précédente,

$$\frac{1}{3}(r_n + 2R_n) > \rho > \sqrt[3]{r_n R_n^2}.$$

D'un autre côté, on sait que

$$\lim r_n = \lim R_n = \rho.$$

Donc

$$\frac{1}{3}\lim(r_n + 2R_n) = \lim \sqrt[3]{r_n R_n^2} = \rho.$$

Plus généralement, si deux séries de quantités :

$$u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$$
$$v_1, v_2, \ldots v_n, \ldots$$

sont telles que

$$\lim u_n = \lim v_n = A,$$

on aura

$$\frac{1}{a+b}\lim[au_n + bv_n] = \lim\left[u_n^a \cdot v_n^b\right]^{\frac{1}{a+b}} = A.$$

Liège, 20 mars 1882. E. CATALAN.

M. le Capitaine Brocard nous a aussi envoyé une solution de la solution 65, que nous espérons publier ultérieurement.

NOTE. La méthode employée par M. Catalan pour démontrer le lemme II (*) reposant au fond sur la théorie des séries récurrentes, qui n'est peut-être pas familière à tous nos lecteurs, nous croyons utile de donner ici une autre démonstration plus élémentaire.

Sur une droite quelconque OX, prenons les distances $OA = a$, $OB = b$, $OA_3 = u_3$, $OA_4 = u_4$, $OA_5 = u_5$,.... Les points A_3, A_4, A_5,.... seront respectivement les milieux des segments AB, A_3B, A_4A_3,.... Il est facile de voir que

$$OA_n = OB - \frac{AB}{2} + \frac{AB}{4} - \frac{AB}{8} + \cdots + (-1)^n \frac{AB}{2^{n-2}}.$$

Par conséquent,

$$\lim u_n = b - \frac{b-a}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots\right) = b - \frac{1}{3}(b-a) = \frac{1}{3}(a+2b).$$

(J. N.)

(*) Ce lemme est proposé, comme exercice, dans l'*Algèbre* de BERTRAND.