C (*). — Les *imaginaires* sont-elles des *quantités?* Je ne le pense pas.

Ordinairement, on appelle *quantité, ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution.* Peut-on dire qu'une imaginaire augmente? peut-on dire que $3 + 4\sqrt{-1}$ surpasse $2 + 3\sqrt{-1}$? Évidemment non. *Ergo*, ...

Ces simples remarques sont une répétition de celles que j'ai faites fort souvent. Mais, bien entendu, cette façon de penser n'est pas un *théorème :* elle est, tout au plus, une *opinion probable.*

SUR LA QUADRATURE DES COURBES PARABOLIQUES.

(Communication faite au Congrès de Reims, août 1880 (**).)

1. Pour fixer les idées et abréger l'écriture, je considère, en premier lieu, une parabole du *cinquième* degré, dont l'équation soit

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Si l'on suppose que les ordonnées extrêmes répondent à $x = x_0$, $x = x_3$, l'aire de la courbe sera

$$A = \int_{x_0}^{x_3} (a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5)dx. \quad . \quad (2)$$

(*) Voir page 387.

(**) Ce petit travail a pour origines : 1° une communication du général Parmentier, au Congrès de Montpellier; 2° une correspondance avec M. Lucien Lévy, professeur au Lycée de Rennes. En cherchant à simplifier une formule trouvée par M. Lévy, j'ai rencontré un théorème de Gauss, et quelques propositions que je crois nouvelles.

Il s'agit de mettre cette expression sous la forme

$$A = \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ étant des *constantes inconnues*, et y_0, y_1, y_2, y_3 des ordonnées *arbitraires*, répondant à des abscisses *convenablement choisies* (*)

2. Si l'on fait

$$ex^4 + fx^5 = X, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

on a, par la formule d'interpolation de Lagrange :

$$\left.\begin{aligned} & a + bx + cx^2 + dx^3 = \\ & (y_0 - X_0)\frac{F(x)}{(x - x_0)F'(x_0)} + (y_1 - X_1)\frac{F(x)}{(x - x_1)F'(x_1)} \\ & + (y_2 - X_2)\frac{F(x)}{(x - x_2)F'(x_2)} + (y_3 - X_3)\frac{F(x)}{(x - x_3)F'(x_3)}; \end{aligned}\right\} . \quad . \quad (5)$$

en supposant

$$F(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3). \quad . \quad . \quad (6)$$

3. D'après les formules (2), (3), (5), les valeurs des *constantes* sont :

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0 &= \int_{x_0}^{x_3} \frac{F(x)dx}{(x - x_0)F'(x_0)}, & \lambda_1 &= \int_{x_0}^{x_3} \frac{F(x)dx}{(x - x_1)F'(x_1)}, \\ \lambda_2 &= \int_{x_0}^{x_3} \frac{F(x)dx}{(x - x_2)F'(x_2)}, & \lambda_3 &= \int_{x_0}^{x_3} \frac{F(x)dx}{(x - x_3)F'(x_3)}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

En outre, *la fonction* F(x) *doit satisfaire à la condition :*

$$\left.\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_3} \Big[& -\frac{X_0 F(x)}{(x - x_0)F'(x_0)} - \frac{X_1 F(x)}{(x - x_1)F'(x_1)} - \frac{X_2 F(x)}{(x - x_2)F'(x_2)} \\ & - \frac{X_3 F(x)}{(x - x_3)F'(x_3)} + ex^4 + fx^5 \Big] dx = 0. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

(*) Problème résolu par Gauss.

4. Celle-ci sera vérifiée si, dans le premier membre, les coefficients de e et de f sont nuls. Le coefficient de e est

$$\int_{x_0}^{x_3}\left[x^4 - \frac{F(x)}{(x-x_0)F'(x_0)}x_0^4 - \frac{F(x)}{(x-x_1)F'(x_1)}x_1^4 - \frac{F(x)}{(x-x_2)F'(x_2)}x_2^4 - \frac{F(x)}{(x-x_3)F'(x_3)}x_3^4\right]dx;$$

ou, simplement, à cause de la formule (6) :

$$\int_{x_0}^{x_3} F(x)dx.$$

De même, le coefficient de f est

$$\int_{x_0}^{x_3} (x-\alpha)F(x)dx,$$

α étant une quantité dont il est inutile d'écrire la valeur.

5. Jusqu'à présent, nons n'avons fait aucune hypothèse sur les limites x_0, x_3. Afin d'obtenir des résultats et des règles simples, nous supposerons, désormais,

$$x_0 = -1, \quad x_3 = +1 \ (^*).$$

La formule (6) devient

$$F(x) = (x^2-1)(x-x_1)(x-x_2); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

et, en vertu de ce qui précède :

$$\int_{-1}^{+1} F(x)dx = 0, \quad \int_{-1}^{+1}(x-\alpha)F(x)dx. \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Il est visible que ces deux conditions seront remplies si l'on

---

(*) Ceci n'altère, en rien, la généralité des résultats; car on peut toujours prendre, pour unité, la moitié de la distance comprise entre les ordonnées extrêmes.

prend

$$F(x) = k\left[(x^2-1)^3\right]'', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

k étant un coefficient convenable (*).

En effectuant et identifiant, on trouve :

$$(x-x_1)(x-x_2) = x^2 - \frac{1}{5},$$

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad x_2 = +\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

6. Les formules (7) deviennent d'abord, à cause de $x_2 = -x_1$:

$$\lambda_0 = \int_{-1}^{+1} \frac{F(x)dx}{(x+1)F'(-1)}, \quad \lambda_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{F(x)dx}{(x-x_1)F'(x_1)},$$

$$\lambda_2 = \int_{-1}^{+1} \frac{F(x)dx}{(x+x_1)F'(-x_1)}, \quad \lambda_3 = \int_{+1}^{+1} \frac{F(x)dx}{(x-1)F'(+1)}.$$

Il résulte, de celles-ci :

$$\lambda_3 = \lambda_0, \quad \lambda_2 = \lambda_1 \text{ (**)}.$$

En effet, $F(x)$ est une fonction *paire*, et $F'(x)$ une fonction *impaire*. Par conséquent, si l'on change x en $-x$, dans la valeur de λ_3, on a

$$\lambda_3 = \int_{-1}^{+1} \frac{F(x)dx}{(-x-1)\times -F'(-1)} = \lambda_0.$$

De même pour λ_1 et λ_2.

(*) En général,

$$F(x) = k\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}.$$

Nos polynômes, plus simples que ceux de Gauss, dépendent des fonctions X_n : à un facteur près,

$$F(x) = \int_{-1}^{x} X_n dx.$$

(**) Cette propriété est générale.

Conséquemment,

$$A = \lambda_0(y_0 + y_3) + \lambda_1(y_1 + y_2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

7. On a

$$F(x) = (x^2 - 1)(x^2 - \tfrac{1}{5}) = x^4 - \tfrac{6}{5}x^2 + \tfrac{1}{5},$$

$$F'(x) = 4x^3 - \tfrac{12}{5}x,$$

$$\frac{F(x)}{x+1} = x^3 - x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}, \quad \frac{F(x)}{x - x_1} = x^3 - \frac{1}{\sqrt{5}}x^2 - x + \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$F'(-1) = -\frac{8}{5}, \quad F'(x_1) = \frac{8}{5\sqrt{5}}.$$

Donc

$$\lambda_0 = -\frac{5}{8}\int_{-1}^{+1}\left(x^3 - x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}\right)dx = \frac{1}{6},$$

$$\lambda_1 = \frac{5\sqrt{5}}{8}\int_{-1}^{+1}\left(x^3 - \frac{1}{\sqrt{5}}x^2 - x + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)dx = \frac{5}{6}.$$

Pour la parabole du cinquième degré, la formule de quadrature est donc, finalement,

$$A = \tfrac{1}{6}(y_0 + y_3) + \tfrac{5}{6}(y_1 + y_2)\ (^*). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

8. D'après les formules (5) et (8), si l'on fait

$$Y = y_0\frac{F(x)}{(x - x_0)F'(x_0)} + y_1\frac{F(x)}{(x - x_1)F'(x_1)} + y_2\frac{F(x)}{(x - x_2)F'(x_2)}$$
$$+ y_3\frac{F(x)}{(x - x_3)F'(x_3)} = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3,$$

cette équation représente la parabole *déterminée* par les quatre points ayant pour coordonnées x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3. L'aire

(*) On ne doit pas oublier que

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad x_2 = +\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad x_3 = +1.$$

de cette parabole est

$$A' = \int_{-1}^{+1} Y dx = \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = A.$$

Et comme la méthode est générale, on a ce théorème curieux, dont j'ai donné, en 1857 (*), un cas particulier :

Toutes les paraboles du degré $2n - 1$, *qui passent par* $n + 1$ *points convenablement choisis, sont équivalentes à la parabole, du degré* n, *déterminée par ces* $n + 1$ *points* (**).

9. *Applications.* 1° Soit

$$y = 3 + x - x^2 + 2x^3 + x^4 + x^5;$$

et, par conséquent,

$$A = 2\int_0^1 (3 - x^2 + x^4)dx = 2(3 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5}),$$

ou

$$A = \frac{86}{15}.$$

Faisant

$$x = -1, \quad x = +1, \quad x = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad x = +\frac{1}{\sqrt{5}},$$

on trouve

$$y_0 = -1, \quad y_3 = 7, \quad y_1 = \frac{71}{25} - \frac{36}{25\sqrt{5}}, \quad y_2 = \frac{71}{25} + \frac{36}{25\sqrt{5}};$$

puis, par l'application de la formule (13) :

$$A = \frac{1}{6}(-1 + 7) + \frac{5}{6}\cdot 2 \cdot \frac{71}{15} = \frac{86}{15};$$

comme ci-dessus.

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XVI, p. 312; *Manuel des Candidats à l'École polytechnique*, t. II, p. 295.

(**) Dans sa communication au Congrès de Montpellier, M. le général Parmentier semble croire que le théorème est vrai, seulement, pour la parabole du troisième degré.

2°
$$y = \frac{1}{2+x}.$$

On a

$$y_0 = 1, \quad y_3 = \frac{1}{3}, \quad y_1 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-1}, \quad y_2 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+1};$$

puis, par la formule (13) :

$$A = \frac{2}{9} + \frac{50}{57} = 1{,}0994.$$

La valeur *exacte* est

$$A = \text{l}.3 = 1{,}0986\ldots$$

L'erreur résultant de la formule est donc, seulement, 0,0008.

E. Catalan.

P. S. — Dans le cas général, la méthode précédente prouve que *certains déterminants sont nuls.* Nous reviendrons, peut-être, sur cette question intéressante.

THÉORIE GÉOMÉTRIQUE

des courbes anallagmatiques, sections planes de la Cyclide;

par M. Laquière, ancien officier d'Artillerie (Alger).

(*Suite*, voir t. VI, p. 351.)

DE LA CYCLIDE.

Considérons trois cercles 1, 2, 3, situés dans un même plan, comme les équateurs de trois sphères M. On nomme *cyclide* l'enveloppe de la sphère N, variable de grandeur et de position, qui reste constamment tangente aux trois sphères directrices M.

Soit Σ l'un des axes de similitude des trois cercles : on sait