

Article

Sur la quadrature des courbes paraboliques.

in: Nouvelle correspondance mathématique | Nouvelle correspondance  
mathématique - 6 | Dérivées des fonctions élémentaires d'une variable  
imaginaire. Sur la qu...

## Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library. Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions. Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library. For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

### **Contact:**

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek  
Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

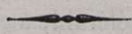
### **Purchase a CD-ROM**

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:  
Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen, Germany, Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

C (\*). — Les *imaginaires* sont-elles des *quantités*? Je ne le pense pas.

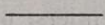
Ordinairement, on appelle *quantité*, ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. Peut-on dire qu'une imaginaire augmente? peut-on dire que  $3 + 4\sqrt{-1}$  surpasse  $2 + 3\sqrt{-1}$ ? Évidemment non. *Ergo*, .....

Ces simples remarques sont une répétition de celles que j'ai faites fort souvent. Mais, bien entendu, cette façon de penser n'est pas un *théorème* : elle est, tout au plus, une *opinion probable*.



## SUR LA QUADRATURE DES COURBES PARABOLIQUES.

(Communication faite au Congrès de Reims, août 1880 (\*\*).)



1. Pour fixer les idées et abrégier l'écriture, je considère, en premier lieu, une parabole du *cinquième* degré, dont l'équation soit

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5. \quad (1)$$

Si l'on suppose que les ordonnées extrêmes répondent à  $x = x_0, x = x_5$ , l'aire de la courbe sera

$$A = \int_{x_0}^{x_5} (a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5) dx. \quad (2)$$

(\*) Voir page 587.

(\*\*) Ce petit travail a pour origines : 1° une communication du général Parmentier, au Congrès de Montpellier; 2° une correspondance avec M. Lucien Lévy, professeur au Lycée de Rennes. En cherchant à simplifier une formule trouvée par M. Lévy, j'ai rencontré un théorème de Gauss, et quelques propositions que je crois nouvelles.

Il s'agit de mettre cette expression sous la forme

$$A = \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3; \quad \dots \quad (5)$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  étant des *constantes inconnues*, et  $y_0, y_1, y_2, y_3$  des ordonnées *arbitraires*, répondant à des abscisses *convenablement choisies* (\*)

2. Si l'on fait

$$ex^4 + fx^5 = X, \quad \dots \quad (4)$$

on a, par la formule d'interpolation de Lagrange :

$$\left. \begin{aligned} & a + bx + cx^2 + dx^3 = \\ & (y_0 - X_0) \frac{F(x)}{(x - x_0)F'(x_0)} + (y_1 - X_1) \frac{F(x)}{(x - x_1)F'(x_1)} \\ & + (y_2 - X_2) \frac{F(x)}{(x - x_2)F'(x_2)} + (y_3 - X_3) \frac{F(x)}{(x - x_3)F'(x_3)}; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

en supposant

$$F(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3). \quad \dots \quad (6)$$

3. D'après les formules (2), (5), (6), les valeurs des *constantes* sont :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 &= \int_{x_0}^{x_3} \frac{F(x)dx}{(x - x_0)F'(x_0)}, & \lambda_1 &= \int_{x_0}^{x_3} \frac{F(x)dx}{(x - x_1)F'(x_1)}, \\ \lambda_2 &= \int_{x_0}^{x_3} \frac{F(x)dx}{(x - x_2)F'(x_2)}, & \lambda_3 &= \int_{x_0}^{x_3} \frac{F(x)dx}{(x - x_3)F'(x_3)}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

En outre, la fonction  $F(x)$  doit satisfaire à la condition :

$$\left. \begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_3} \left[ -\frac{X_0 F(x)}{(x - x_0)F'(x_0)} - \frac{X_1 F(x)}{(x - x_1)F'(x_1)} - \frac{X_2 F(x)}{(x - x_2)F'(x_2)} \right. \\ & \left. - \frac{X_3 F(x)}{(x - x_3)F'(x_3)} + ex^4 + fx^5 \right] dx = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(\*) Problème résolu par Gauss.



4. Celle-ci sera vérifiée si, dans le premier membre, les coefficients de  $e$  et de  $f$  sont nuls. Le coefficient de  $e$  est

$$\int_{x_0}^{x_5} \left[ x^4 - \frac{F(x)}{(x-x_0)F'(x_0)} x_0^4 - \frac{F(x)}{(x-x_1)F'(x_1)} x_1^4 - \frac{F(x)}{(x-x_2)F'(x_2)} x_2^4 - \frac{F(x)}{(x-x_5)F'(x_5)} x_5^4 \right] dx;$$

ou, simplement, à cause de la formule (6) :

$$\int_{x_0}^{x_5} F(x) dx.$$

De même, le coefficient de  $f$  est

$$\int_{x_0}^{x_5} (x - \alpha) F(x) dx,$$

$\alpha$  étant une quantité dont il est inutile d'écrire la valeur.

5. Jusqu'à présent, nous n'avons fait aucune hypothèse sur les limites  $x_0, x_5$ . Afin d'obtenir des résultats et des règles simples, nous supposons, désormais,

$$x_0 = -1, \quad x_5 = +1 (*).$$

La formule (6) devient

$$F(x) = (x^2 - 1)(x - x_1)(x - x_2); \dots \dots (9)$$

et, en vertu de ce qui précède :

$$\int_{-1}^{+1} F(x) dx = 0, \quad \int_{-1}^{+1} (x - \alpha) F(x) dx. \dots \dots (10)$$

Il est visible que ces deux conditions seront remplies si l'on

(\*) Ceci n'altère, en rien, la généralité des résultats; car on peut toujours prendre, pour unité, la moitié de la distance comprise entre les ordonnées extrêmes.

prend

$$F(x) = k[(x^2 - 1)^3]', \dots \dots \dots (11)$$

$k$  étant un coefficient convenable (\*).

En effectuant et identifiant, on trouve :

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - \frac{1}{5},$$

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad x_2 = +\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

6. Les formules (7) deviennent d'abord, à cause de  $x_2 = -x_1$  :

$$\lambda_0 = \int_{-1}^{+1} \frac{F(x)dx}{(x+1)F'(-1)}, \quad \lambda_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{F(x)dx}{(x-x_1)F'(x_1)},$$

$$\lambda_2 = \int_{-1}^{+1} \frac{F(x)dx}{(x+x_1)F'(-x_1)}, \quad \lambda_3 = \int_{+1}^{+1} \frac{F(x)dx}{(x-1)F'(1)}.$$

Il résulte, de celles-ci :

$$\lambda_3 = \lambda_0, \quad \lambda_2 = \lambda_1 (**).$$

En effet,  $F(x)$  est une fonction *paire*, et  $F'(x)$  une fonction *impaire*. Par conséquent, si l'on change  $x$  en  $-x$ , dans la valeur de  $\lambda_3$ , on a

$$\lambda_3 = \int_{-1}^{+1} \frac{F(x)dx}{(-x-1) \times -F'(-1)} = \lambda_0.$$

De même pour  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

(\*) En général,

$$F(x) = k \frac{d^{n-1}(x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}}.$$

Nos polynômes, plus simples que ceux de Gauss, dépendent des fonctions  $X_n$  : à un facteur près,

$$F(x) = \int_{-1}^x X_n dx.$$

(\*\*) Cette propriété est générale.

Conséquemment,

$$A = \lambda_0(y_0 + y_3) + \lambda_1(y_1 + y_2) \dots \dots \dots (12)$$

7. On a

$$F(x) = (x^2 - 1)(x^2 - \frac{1}{5}) = x^4 - \frac{6}{5}x^2 + \frac{1}{5},$$

$$F'(x) = 4x^3 - \frac{12}{5}x,$$

$$\frac{F(x)}{x+1} = x^3 - x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}, \quad \frac{F(x)}{x-x_1} = x^3 - \frac{1}{\sqrt{5}}x^2 - x + \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$F'(-1) = -\frac{8}{5}, \quad F'(x_1) = \frac{8}{5\sqrt{5}}.$$

Donc

$$\lambda_0 = -\frac{5}{8} \int_{-1}^{-1+1} \left( x^3 - x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{5} \right) dx = \frac{1}{6},$$

$$\lambda_1 = \frac{5\sqrt{5}}{8} \int_{-1}^{-1+1} \left( x^3 - \frac{1}{\sqrt{5}}x^2 - x + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) dx = \frac{5}{6}.$$

Pour la parabole du cinquième degré, la formule de quadrature est donc, finalement,

$$A = \frac{1}{6}(y_0 + y_3) + \frac{5}{6}(y_1 + y_2) (*) \dots \dots \dots (15)$$

8. D'après les formules (5) et (8), si l'on fait

$$Y = y_0 \frac{F(x)}{(x-x_0)F'(x_0)} + y_1 \frac{F(x)}{(x-x_1)F'(x_1)} + y_2 \frac{F(x)}{(x-x_2)F'(x_2)} + y_3 \frac{F(x)}{(x-x_3)F'(x_3)} = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3,$$

cette équation représente la parabole *déterminée* par les quatre points ayant pour coordonnées  $x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ . L'aire

(\*) On ne doit pas oublier que

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad x_2 = +\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad x_3 = +1.$$



de cette parabole est

$$A' = \int_{-1}^{+1} Y dx = \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = A.$$

Et comme la méthode est générale, on a ce théorème curieux, dont j'ai donné, en 1857 (\*), un cas particulier :

*Toutes les paraboles du degré  $2n - 1$ , qui passent par  $n + 1$  points convenablement choisis, sont équivalentes à la parabole, du degré  $n$ , déterminée par ces  $n + 1$  points (\*\*).*

9. Applications. 1° Soit

$$y = 3 + x - x^2 + 2x^3 + x^4 + x^5;$$

et, par conséquent,

$$A = 2 \int_0^1 (3 - x^2 + x^4) dx = 2(3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}),$$

ou

$$A = \frac{86}{15}.$$

Faisant

$$x = -1, \quad x = +1, \quad x = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad x = +\frac{1}{\sqrt{5}},$$

on trouve

$$y_0 = -1, \quad y_5 = 7, \quad y_1 = \frac{71}{25} - \frac{36}{25\sqrt{5}}, \quad y_2 = \frac{71}{25} + \frac{36}{25\sqrt{5}};$$

puis, par l'application de la formule (15) :

$$A = \frac{1}{6}(-1 + 7) + \frac{5}{6} \cdot 2 \cdot \frac{71}{15} = \frac{86}{15};$$

comme ci-dessus.

(\*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XVI, p. 512; *Manuel des Candidats à l'École polytechnique*, t. II, p. 295.

(\*\*) Dans sa communication au Congrès de Montpellier, M. le général Parmentier semble croire que le théorème est vrai, seulement, pour la parabole du troisième degré.

$$2^{\circ} \quad y = \frac{1}{2+x}.$$

On a

$$y_0 = 1, \quad y_3 = \frac{1}{3}, \quad y_1 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-1}, \quad y_2 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+1};$$

puis, par la formule (13) :

$$A = \frac{2}{9} + \frac{50}{57} = 1,0994.$$

La valeur *exacte* est

$$A = 1.\bar{3} = 1,0986 \dots$$

L'erreur résultant de la formule est donc, seulement, 0,0008.

E. CATALAN.

*P. S.* — Dans le cas général, la méthode précédente prouve que *certaines déterminants sont nuls*. Nous reviendrons, peut-être, sur cette question intéressante.



## THÉORIE GÉOMÉTRIQUE

des courbes anallagmatiques, sections planes de la Cyclide;

par M. LAQUIÈRE, ancien officier d'Artillerie (Alger).

(Suite, voir t. VI, p. 351.)

---

### DE LA CYCLIDE.

Considérons trois cercles 1, 2, 3, situés dans un même plan, comme les équateurs de trois sphères M. On nomme *cyclide* l'enveloppe de la sphère N, variable de grandeur et de position, qui reste constamment tangente aux trois sphères directrices M.

Soit  $\Sigma$  l'un des axes de similitude des trois cercles : on sait