

Autre lettre de M. Mansion. — « Je n'ai pas trouvé non plus (*), dans les *Œuvres complètes* d'ABEL, la *Question 364* :

Trouver une intégrale particulière de l'équation

$$D^2y + 5Dy + 2(y - y^3) = 0,$$

dont M. Jamet a donné la solution (pp. 381-382 du tome VI de la *N. C. M.*). Mais il se peut, néanmoins, que l'illustre Géomètre norvégien s'en soit occupé, à propos de ses recherches sur les fonctions elliptiques. L'intégrale *générale*, en effet, dépend de ces fonctions elliptiques spéciales que GAUSS a appelées *lemniscatiques* et qui correspondent à la valeur $\sqrt{\frac{1}{2}}$ du module.

Voici comment j'obtiens cette intégrale générale. L'équation donnée peut s'écrire, symboliquement :

$$(D + 2)(D + 1)y = 2y^3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Soit

$$Dy + y = z; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

et, en conséquence,

$$Dz + 2z = 2y^3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

La méthode de la variation des constantes arbitraires conduit à poser

$$y = ue^{-z}, \quad z = ve^{-2x}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

ce qui donne, au lieu des équations (2), (3) :

$$\frac{du}{dx} = ve^{-z}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\frac{dv}{dx} = 2u^3e^{-z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

On conclut, de ces équations (6), (7) :

$$4u^3du = 2vdv, \\ u^4 - C = v^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

(*) Voir ci-dessus, p. 446.

C étant une constante arbitraire. Si on la suppose nulle, on retrouve l'intégrale particulière donnée par M. Jamet. Mais, dans le cas général, en substituant la valeur

$$v = \sqrt{u^4 - C},$$

dans (6), nous aurons

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{u^4 - C} e^{-x},$$

c'est-à-dire

$$e^{-x} dx = \frac{du}{\sqrt{u^4 - C}}.$$

L'intégrale de celle-ci :

$$e^{-x} = G - \int \frac{du}{\sqrt{u^4 - C}}, \quad (9)$$

contient, dans le second membre, une transcendante elliptique, irréductible aux fonctions élémentaires. Cette équation (9), réunie à

$$y = ue^{-x} \quad (4)$$

donne l'intégrale générale de l'équation d'ABEL. Il est vrai que l'élimination de u , entre (9) et (4), ne peut s'effectuer d'une manière générale; mais cela tient à la nature de la question.

La méthode précédente permet d'intégrer l'équation

$$D^2y + (k + l)Dy + kly + Ay^m,$$

pourvu que $(m + 1)k = 2l$, ou que $(m + 1)l = 2k$. En parti-

NOTES DU RÉDACTEUR. — I. Après avoir essayé, inutilement, d'intégrer l'équation d'Abel (*), j'ai proposé le problème à divers Collègues, puis à M. Mansion, qui l'a résolu du premier coup.

II. De l'intéressante lettre qu'on vient de lire, il résulte que l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = y^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

est

$$e^{-x} = G - \int \frac{d(e^x y)}{\sqrt{(e^x y)^4 - C}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

III. *Vérification.* 1° Si l'on différencie les deux membres, on trouve l'équation du premier ordre :

$$e^{-x} dx = \frac{d(e^x y)}{\sqrt{(e^x y)^4 - C}},$$

ou

$$\sqrt{(e^x y)^4 - C} = e^{2x} \left(y + \frac{dy}{dx} \right),$$

ou encore

$$(e^x y)^4 - C = e^{4x} \left(y + \frac{dy}{dx} \right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

2° L'équation dérivée de celle-ci est

$$4(e^x y)^5 \left(y + \frac{dy}{dx} \right) e^x = 4e^{4x} \left(y + \frac{dy}{dx} \right)^2 + 2e^{4x} \left(y + \frac{dy}{dx} \right) \left(\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \right);$$

ou, après suppression des facteurs communs,

$$2y^3 = 2 \left(y + \frac{dy}{dx} \right) + \left(\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \right); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

ce qui ne diffère pas de la proposée.

(*) Ou plutôt de M. Holmboë.

IV. Les deux membres de l'équation (C), étant multipliés par $2e^{4x} (dy + dx)$, deviennent des différentielles exactes : en intégrant de part et d'autre, on obtient l'équation (B). Ainsi, l'équation (1) peut être intégrée, une première fois, au moyen d'un facteur.

V. Si l'on change C en c^4 , et que l'on fasse usage de la transformation connue :

$$u = \frac{c}{\cos \varphi},$$

on obtient :

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^4 - c^4}} = \frac{1}{c\sqrt{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi}} = \frac{1}{c\sqrt{2}} F(\sqrt{\frac{1}{2}}, \varphi);$$

puis

$$y \cos \varphi = ce^{-x} = b - \frac{1}{\sqrt{2}} F(\sqrt{\frac{1}{2}}, \varphi); \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

formules dans lesquelles $b = cG$.

VI. J'ai trouvé, comme transformées de l'équation (1) :

$$\frac{dy}{dx} + 3\sqrt{2y} - 2x(x^2 - 1) = 0,$$

$$[(x-1)(x-2) + y] \frac{dy}{dx} + 2xy = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \frac{x(x^2 - 1)}{y - 3x},$$

.

Conséquemment, toutes ces équations sont intégrables.

(E. CATALAN.)