

Article

Sur la série harmonique.

Cesaro, E.

in: Nouvelle correspondance mathématique | Nouvelle correspondance mathématique - 6 | Sur les normales a l'ellipse. Sur les surfaces a génératrices circulaire...

Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions. Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek
Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Purchase a CD-ROM

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen, Germany, Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

donnant une solution de (1), pour $k = PQ$. C'est ainsi que l'égalité

$$5 \cdot 2^2 - 19 \cdot 1 = 1$$

engendre celle-ci :

$$59^2 - 95 \cdot 4^2 = 1.$$

Soit, secondement, l'équation

$$Px^2 - Qy^2 = 2,$$

que l'on suppose vérifiée par $x = \alpha$, $y = \beta$. Il s'ensuit

$$(P\alpha^2 - 1)^2 - PQ(\alpha\beta)^2 = (Q\beta^2 + 1)^2 - PQ(\alpha\beta)^2 = 1,$$

par où l'on a encore une solution de (1), pour $k = QP$. Par exemple, de

$$15 \cdot 3^2 - 115 \cdot 1^2 = 2,$$

on conclut

$$116^2 - 1 \cdot 495 \cdot 3^2 = 1.$$

Relativement à ces équations auxiliaires, il y a lieu de rappeler les théorèmes rapportés dans la *Théorie des nombres* de Legendre, 1^{re} partie, § VII. (La suite prochainement.)

SUR LA SÉRIE HARMONIQUE;

par M. E. CESARO.

THÉORÈME. *La somme des n premiers termes de la série harmonique est comprise entre $\ln + \frac{1}{2}$ et $\ln + 1$.*

De la formule connue (*Cours d'Analyse de l'Université de Liège*) :

$$1 \frac{n}{n-1} = 2 \left[\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n-1)^3} + \dots \right],$$

on déduit la double inégalité :

$$\frac{2}{2n-2} < 1 \frac{n}{n-1} < 2 \left[\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{(2n-1)^3} + \dots \right],$$

ou bien

$$\frac{2}{2n-1} < 1 \frac{n}{n-1} < \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{n-1} \right].$$

Changeant n en $n-1$, $n-2$, ..., 4 , 3 , 2 , et ajoutant, on obtient, en désignant par S_n la somme des n premiers termes de la série harmonique,

$$2S_{2n} - S_n - 2 < \ln < S_n - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

Or,

$$S_{2n} = S_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > S_n + \frac{1}{2}.$$

Si l'on remplace S_{2n} par $S_n + \frac{1}{2}$, dans l'inégalité ci-dessus, celle-ci subsiste à plus forte raison, et devient

$$S_n - 1 < \ln < S_n - \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\ln + \frac{1}{2} < S_n < \ln + 1.$$

NOTE DU RÉDACTEUR. On peut, de diverses manières, déterminer des limites entre lesquelles soit comprise la quantité

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

1° M. Schlömilch a trouvé

$$\ln(n+1) < S_n < 1 + \ln(n+1) \quad (*) \quad \dots \quad (A)$$

(*) *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1859.

2° Une simple considération géométrique suffit pour démontrer la double inégalité

$$1(n+1) < S_n < \frac{n}{n+1} + 1(n+1) (*) \dots (B)$$

3° Le même procédé donne

$$1 + 1 \frac{n+1}{2} < S_n < 1 + 1n \dots (C)$$

4° Enfin, si l'on part de la relation

$$S_n = 1n - \varphi(n) + C,$$

dans laquelle $\varphi(n)$ est une quantité qui s'annule pour n infini, et

$$C = 0,577\ 215\ 664 \dots,$$

on trouve

$$1n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} + C < S_n < 1n + \frac{1}{2n} + C(**) \dots (D)$$

Si l'on compare les inégalités résultant de considérations élémentaires, on voit que celles de M. Cesaro ont l'avantage sur toutes les autres, du moins à partir de $n=5$.

P.-S. Depuis que son travail est imprimé, M. Cesaro m'en a envoyé un autre, dans lequel les limites $1n+1$ et $1n+\frac{1}{2}$ sont remplacées par

$$1(n+\frac{1}{2}) + 0,60 \quad \text{et} \quad 1(n+\frac{1}{2}) + 0,55.$$

Ces nouvelles limites sont remarquablement approchées.

(*) *Traité élémentaire des séries*, p. 54.

(**) *Mélanges mathématiques*, p. 164; *Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet*; etc.