donnant une solution de (1), pour $k = PQ$. C'est ainsi que l'égalité

$$5.2^2 - 19.1 = 1$$

engendre celle-ci :

$$39^2 - 95.4^2 = 1.$$

Soit, secondement, l'équation

$$Px^2 - Qy^2 = 2,$$

que l'on suppose vérifiée par $x = \alpha$, $y = \beta$. Il s'ensuit

$$(P\alpha^2 - 1)^2 - PQ(\alpha\beta)^2 = (Q\beta^2 + 1)^2 - PQ(\alpha\beta)^2 = 1,$$

par où l'on a encore une solution de (1), pour $k = QP$. Par exemple, de

$$13.3^2 - 115.1^2 = 2,$$

on conclut

$$116^2 - 1\,495.3^2 = 1.$$

Relativement à ces équations auxiliaires, il y a lieu de rappeler les théorèmes rapportés dans la *Théorie des nombres* de Legendre, 1re partie, § VII. (*La suite prochainement.*)

SUR LA SÉRIE HARMONIQUE;

par M. E. CESARO.

THÉORÈME. *La somme des* n *premiers termes de la série harmonique est comprise entre* $\ln + \frac{1}{2}$ *et* $\ln + 1$.

De la formule connue (*Cours d'Analyse de l'Université de Liége*) :

$$1\frac{n}{n-1}=2\left[\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n-1)^3}+\cdots\right],$$

on déduit la double inégalité :

$$\frac{2}{2n-2}<1\frac{n}{n-1}<2\left[\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{(2n-1)^3}+\cdots\right],$$

ou bien

$$\frac{2}{2n-1}<1\frac{n}{n-1}<\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right].$$

Changeant n en $n-1$, $n-2$, ..., 4, 3, 2, et ajoutant, on obtient, en désignant par S_n la somme des n premiers termes de la série harmonique,

$$2S_{2n}-S_n-2<1n<S_n-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Or,

$$S_{2n}=S_n+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>S_n+\frac{1}{2}.$$

Si l'on remplace S_{2n} par $S_n+\frac{1}{2}$, dans l'inégalité ci-dessus, celle-ci subsiste à plus forte raison, et devient

$$S_n-1<1n<S_n-\tfrac{1}{2}.$$

Donc

$$1n+\tfrac{1}{2}<S_n<1n+1.$$

Note du Rédacteur. On peut, de diverses manières, déterminer des limites entre lesquelles soit comprise la quantité

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

1° M. Schlömilch a trouvé

$$1(n+1)<S_n<1+1(n+1)\,(^*). \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (A)$$

(*) *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1859.

2° Une simple considération géométrique suffit pour démontrer la double inégalité

$$\mathrm{l}(n+1) < S_n < \frac{n}{n+1} + \mathrm{l}(n+1)\ (^*) \ldots \quad \text{(B)}$$

3° Le même procédé donne

$$1 + \mathrm{l}\,\frac{n+1}{2} < S_n < 1 + \mathrm{l}n. \quad \ldots \quad \text{(C)}$$

4° Enfin, si l'on part de la relation

$$S_n = \mathrm{l}n - \varphi(n) + C,$$

dans laquelle $\varphi(n)$ est une quantité qui s'annule pour n *infini*, et

$$C = 0,577\,215\,664\ldots,$$

on trouve

$$\mathrm{l}n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} + C < S_n < \mathrm{l}n + \frac{1}{2n} + C\ (^{**}) \quad . \quad . \quad \text{(D)}$$

Si l'on compare les inégalités résultant de considérations élémentaires, on voit que celles de M. Cesaro ont l'avantage sur toutes les autres, du moins à partir de $n = 5$.

P.-S. Depuis que son travail est imprimé, M. Cesaro m'en a envoyé un autre, dans lequel les limites $\mathrm{l}n + 1$ et $\mathrm{l}n + \frac{1}{2}$ sont remplacées par

$$\mathrm{l}(n + \tfrac{1}{2}) + 0,60 \quad \text{et} \quad \mathrm{l}(n + \tfrac{1}{2}) + 0,53.$$

Ces nouvelles limites sont remarquablement approchées.

(*) *Traité élémentaire des séries*, p. 54.

(**) *Mélanges mathémathiques*, p. 164; *Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet*; etc.