Si le nombre n n'est pas divisible par a,

$$\varphi(a, n) = \varphi(a, n-1).$$

Si le nombre n est divisible par a, de sorte que l'on ait $n = ka$, on obtient

$$\varphi(a, n) = ka, \quad \varphi(a, n-1) = (k-1)a.$$

Par conséquent, la différence

$$\varphi(a, n) - \varphi(a, n-1)$$

a la valeur a ou 0, selon que a divise ou ne divise pas n; d'où il suit, immédiatement, que la somme

$$\sum_{a=1}^{a=n} \left[\varphi(a, n) - \varphi(a, n-1)\right]$$

égale la somme des diviseurs de n.

Remarque. En faisant successivement $n = 1, 2, 3, \ldots n$, on obtient, par addition

$$\int 1 + \int 2 + \cdots + \int n = \varphi(1, n) + \varphi(2, n) + \cdots + \varphi(n, n).$$

Le théorème qui fait l'objet de la *Question* 447 (*) est donc démontré. (RADICKE.)

Question 551.

Trouver le coefficient de α^p, dans le développement de $\frac{1}{1-e^{\alpha}x}$.
(E. C.)

PREMIÈRE SOLUTION.

En posant

$$\frac{1}{1-e^{\alpha}x} = a_0 + \frac{a_1}{1}\alpha + \frac{a_2}{1.2}\alpha^2 + \cdots,$$

(*) Voir *N. C. M.*, t. V, p. 296.

ou, symboliquement,

$$\frac{1}{1 - e^{\alpha}x} = e^{a\alpha},$$

on obtient, en multipliant par $1 - e^{\alpha} x$,

$$1 = e^{a\alpha} - xe^{(a+1)\alpha}.$$

Par conséquent

$$a_0 = \frac{1}{1 - x};$$

et, pour $p = 1, 2, 3, \ldots$:

$$a^p - x(a + 1)^p = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

De là nous tirons cette formule de récurrence :

$$(1 - x)a_p - p_1 x a_{p-1} - p_2 x a_{p-2} - \cdots - p_p x a_0 = 0 \text{ (*)}. \qquad (2)$$

Exemples :

$$a_1 = \frac{x}{(1 - x)^2}; \quad a_2 = \frac{x(x + 1)}{(1 - x)^3}; \quad a_3 = \frac{x(x^2 + 4x + 1)}{(1 - x)^4};$$

$$a_4 = \frac{x(x^3 + 11x^2 + 11x + 1)}{(1 - x)^5}; \quad a_5 = \frac{x(x^4 + 26x^3 + 66x^2 + 26x + 1)}{(1 - x)^6}.$$

Deux autres relations récurrentes se déduisent, de l'équation (1), de la manière suivante.

En désignant par $f(y)$ une fonction développable suivant les puissances entières et positives de y, on tire, de (1), cette formule très-générale :

$$f(a) - xf(a + 1) = f(0),$$

où l'on doit remplacer, après le développement, les exposants de a par des indices. En faisant maintenant

$$f(y) = y^m (y - 1)^n,$$

(*) p_q désigne le coefficient de x^q dans le développement de $(1 + x)^p$.

on obtient

$$a^m(a-1)^n - x(a+1)^m a^n = 0,$$

ou

$$(x-1)a_{m+n} + (m_1x + n_1)a_{m+n-1} + (m_2x - n_2)a_{m+n-2} + \cdots = 0, \quad (3)$$

le dernier terme du premier membre étant xa_n, ou $(-1)^{n-1}a_m$, selon que m est supérieur ou inférieur à n. De l'équation (3), nous tirons, pour $m = n + 1$:

$$(x-1)a_{2n+1} + \left[(n+1)_1x + n_1\right]a_{2n} + \left[(n+1)_2x - n_2\right]a_{2n-1} + \cdots$$
$$+ xa_n = 0;$$

et, pour $n = m + 1$:

$$(x-1)a_{2m+1} + \left[m_1x + (m+1)_1\right]a_{2m} + \left[m_2x - (m+1)_2\right]a_{2m-1} + \cdots$$
$$+ (-1)^m a_m = 0.$$

Après avoir changé m en n dans la dernière équation, nous trouvons, par soustraction et addition, ces deux formules récurrentes :

$$(x-1)a_{2n} + n_1(x+1)a_{2n-1} + n_2(x-1)a_{2n-2} + \cdots$$
$$+ \left[x + (-1)^{n-1}\right]a_n = 0,$$

$$2(x-1)a_{2n+1} + \frac{2n+1}{1}(x+1)a_{2n} + \frac{2n}{2}n_1(x-1)a_{2n-1} + \cdots$$
$$+ \left[x + (-1)^n\right]a_n = 0.$$

(Radicke.)

Seconde solution.

Le problème revient à trouver la dérivée $p^{\text{ième}}$ de la fonction

$$y = \frac{1}{1 - e^{\alpha}x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Si l'on pose

$$y = \varphi(u), \quad u = e^{\alpha}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

on a

$$\frac{dy}{d\alpha} = e^{\alpha}\varphi'(u),$$

$$\frac{d^2y}{d\alpha^2} = e^{\alpha}\varphi'(u) + e^{2\alpha}\varphi''(u),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^py}{d\alpha^p} = e^{\alpha}\varphi'(u) + \frac{a_2}{1.2}e^{2\alpha}\varphi''(u) + \cdots + \frac{a_{p-1}}{1.2\ldots\overline{p-1}}e^{(p-1)\alpha}\varphi^{(p-1)}(u) + e^{p\alpha}\varphi^p(u). \quad (3)$$

Pour déterminer les coefficients a_2, a_3, ... a_{p-1}, qui sont indépendants de la fonction φ, prenons

$$\varphi(u) = u^z = e^{\alpha z} \text{ (*)}:$$

l'équation (3) deviendra, après suppression du facteur $e^{\alpha z}$,

$$z^p = z + \frac{z(z-1)}{1.2}a_2 + \frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3}a_3 + \cdots \quad (4)$$

On déduit, de celle-ci :

$$2^p = 2 + a_2,$$
$$3^p = 3 + 3a_2 + a_3,$$
$$4^p = 4 + 6a_2 + 4a_3 + a_4,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

puis

$$a_2 = 2^p - 2.1^p,$$
$$a_3 = 3^p - 3.2^p + 3.1^p,$$
$$a_4 = 4^p - 4.3^p + 6.2^p - 4.1^p,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n = n^p - \frac{n}{1}(n-1)^p + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^p - \cdots \pm \frac{n}{1}1^p \text{ (**)}. \quad (5)$$

(*) Si cette ingénieuse solution, assez peu connue, s'est spontanément présentée à M. Leinekugel, elle lui fait honneur. (E. C.)

(**) Donc, avec la notation des *différences* :

$$a_n = \Delta^n(0^p). \quad \text{(C. E.)}$$

Dans le cas actuel,

$$\varphi^i(u) = \frac{1.2.3\ldots i.x^i}{(1-u)^{i+1}};$$

et, en supposant $u = 1$, ce qui répond à $\alpha = 0$:

$$[\varphi^i(u)]_{u=1} = \frac{1.2.3\ldots i.x^i}{(1-x)^{i+1}} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

La formule (3) devient donc

$$\left(\frac{d^py}{d\alpha^p}\right)_0 = \frac{x}{(1-x)^2} + a_2\frac{x^2}{(1-x)^3} + \cdots + a_{p-1}\frac{x^{p-1}}{(1-x)^p} + 1.2.3..p\frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}.$$

Enfin, d'après le théorème de Mac-Laurin, le coefficient de α^p sera

$$\frac{1}{1.2.3\ldots p}\left(\frac{d^py}{d\alpha^p}\right)_0.$$

(A. Leinekugel).

Note du Rédacteur. Si l'on fait

$$1 + 2^px + 3^px^2 + 4^px^3 + \cdots = \frac{P_p}{(1-x)^{p+1}},$$

on reconnaît facilement :

1° *Que* P_p *est un polynôme de degré* $p-1$, *dont les coefficients sont des nombres entiers* (*);

2° *Que le coefficient de* α^p, *dans le développement de* $\frac{1}{1-e^{\alpha}x}$, *a pour expression*

$$\frac{1}{1.2.3\ldots p}\frac{xP_p}{(1-x)^{p+1}}.$$

D'après la solution précédente, on a donc

$$P_p = (1-x)^{p-1} + x(1-x)^{p-2}\Delta^2(0^p) + x^2(1-x)^{p-3}\Delta^3(0^p) + \cdots + x^{p-1}\Delta^p(0^p).$$

(*) *Cours d'Analyse*, p. 78. — *N. C. M.*, t. V, p. 96.

Par exemple,

$$P_6 = x^4 + 26x^3 + 66x^2 + 26x + 1 \ (^*)$$
$$(1-x)^4 + x(1-x)^3\Delta^2(o^5) + x^2(1-x)^2\Delta^3(o^5) + x^3(1-x)\Delta^4(o^5) + x^4\Delta^5(o^5).$$

En effet, le calcul direct donne :

$$\Delta^2(o^5) = 30, \quad \Delta^3(o^5) = 150, \quad \Delta^4 = (o^5) = 240, \quad \Delta^5(o^5) = 120;$$

et l'on a bien

$$x^4 + 26x^3 + 66x^2 + 26x + x$$
$$= (1-x)^4 + 30x(1-x)^3 + 150x^2(1-x)^2 + 240x^3(1-x) + 120x^4.$$

Question 552.

THÉORÈME. *L'angle de deux hyperboles équilatères, concentriques, est double de l'angle de leurs asymptotes.*

Soient OA, OA′ les asymptotes des deux hyperboles, O leur centre, P leur point de rencontre, PA et PA′ les tangentes. On sait que le segment de tangente, compris entre les asymptotes, est partagé en deux parties égales par le point de contact. On en conclut aisément PA = PO = PA′. Il en résulte que les points O, A, A′ sont sur une même circonférence, ayant P pour centre. Or, dans cette circonférence, l'angle APA′ a pour mesure l'arc AA′, tandis que l'angle AOA′ a pour mesure la moitié de cet arc. Donc APA′ = 2.AOA′. (E. CESARO.)

Autres solutions par MM. Giron, Leinekugel et Fauquembergue.

Le défaut d'espace empêche d'insérer les solutions des *Questions* 399, 433, 555 envoyées par M. Fauquembergue. (E. C.)

(*) *N. C. M.*, t. V, p. 96. Voir aussi la première solution.