Ces courbes sont sections planes du tore et de la cyclide. On peut, sans difficulté, trouver un tore dont la section, sous une inclinaison convenable, soit la parallactique, d'angle V, d'une conique donnée.

SUR LA CYCLIDE;

par Eugène Catalan (*).

Cette surface, étudiée d'abord par M. Charles Dupin (**), a été, depuis quelques années, l'objet des recherches de MM. Mannheim, Picart, Roberts (***), et d'autres Géomètres. Je me propose, dans cette Note, de résumer la plupart des propriétés de la Cyclide, en suivant, autant que possible, la marche indiquée par M. Dupin.

1. Définition de la surface. *La cyclide est l'enveloppe d'une sphère* S, *tangente à trois sphères données*, S_1, S_2, S_3.

Cette définition conduit à des calculs compliqués, et ne montre pas clairement la forme de la surface. On arrive à des résultats

(*) Le Mémoire de M. Laquière, qu'on vient de lire, m'a rappelé une Note sur la Cyclide, commencée il y a dix ans, et *non achevée*. Si je me décide à la publier, telle que je la retrouve dans mes papiers, c'est parce que j'ai l'espoir qu'elle pourra être utile, sinon aux Professeurs, du moins aux Élèves.

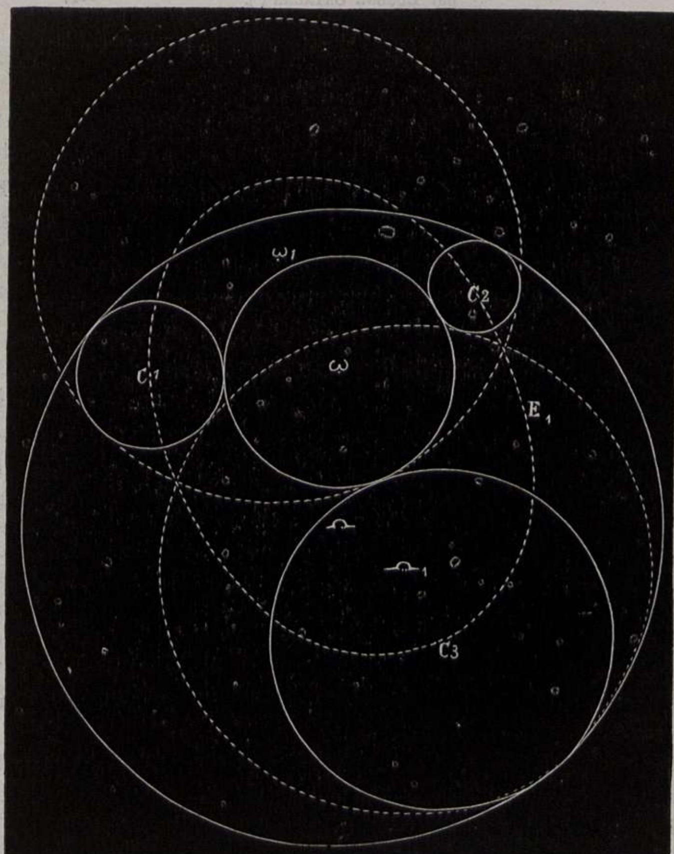
(**) *Correspondance sur l'École polytechnique*, tome I, p. 218, tome II, p. 420; *Applications de Géométrie*, p. 200.

(***) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XIX, p. 67, tome XXIV, pp. 97 et 169.

plus satisfaisants, si l'on considère *chaque nappe* de la cyclide, soit comme *le lieu d'une circonférence qui tourne autour d'une droite fixe, en s'appuyant sur deux circonférences données,* soit comme *une surface canal, enveloppe d'une sphère* S, *dont trois positions particulières sont* S_1, S_2, S_3, *et dont le centre décrit une certaine conique.* La concordance entre les trois définitions peut être prouvée comme il suit.

2. Soient : c_1, c_2, c_3 trois circonférences données; Ω, ω, deux

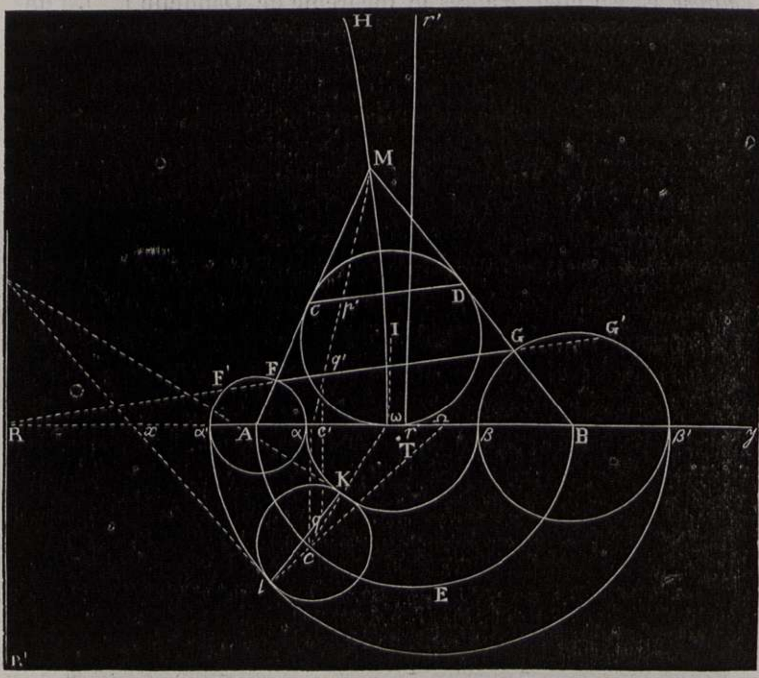
Fig. 1.



circonférences *conjuguées* (*), tangentes aux premières. Soit enfin c une circonférence variable, tangente à Ω, ω, et dont trois positions particulières sont c_1, c_2, c_3. Pour fixer les idées, nous supposerons c_1, c_2, c_3 *extérieures* à ω, *intérieures* à Ω; et, conséquemment, ω *intérieure* à Ω. On peut regarder c_1, c_2, c_3, ω, Ω comme les *sections principales* d'autant de sphères S_1, S_2, S_3, σ, Σ, et la circonférence c, comme la section principale d'une sphère S, tangente à σ, Σ, et dont trois positions particulières sont S_1, S_2, S_3.

3. On sait, et il est d'ailleurs évident, que *le lieu des centres* c

Fig. 2.



(*) Cette expression signifie que chacune des circonférences données est *intérieure* à l'une de ces deux-ci, et *extérieure* à l'autre (*Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire*, p. 164.)

est une conique ayant pour foyers les centres ω, Ω (*). D'après les hypothèses précédentes, cette conique est ici une ellipse E. Un point quelconque de cette courbe est également distant des *circonférences directrices* ω, Ω : en particulier, les extrémités A, B, du grand axe, sont les centres de deux circonférences $A\alpha$, $B\beta$ tangentes, chacune, aux deux autres.

4. Le plan des centres c_1, c_2, c_3, ω, Ω, c étant supposé *horizontal*, prenons AB pour ligne de terre. Soient alors, dans le plan vertical de projection, $C\omega D$ une circonférence tangente, en ω, à AB, et ABM le triangle circonscrit à $C\omega D$. Je dis que *le cône de révolution, dont* AMB *est la section principale, a pour base l'ellipse* E. En effet, d'après le théorème de Dandelin (**), l'un des foyers de la trace horizontale du cône est le point de contact ω : cette trace, ayant mêmes sommets et mêmes foyers que E, coïncide donc avec E.

5. Quand la circonférence $C\omega D$ varie, *le sommet* M *du cône décrit une hyperbole* H *ayant pour sommets les foyers* ω, Ω *de* E, *et pour foyers, les sommets* A, B *de cette ellipse* (***).

6. Soient $c\omega$, $c'M$ les projections de la génératrice qui a pour trace horizontale le centre c. Soit P le point (projeté en p') où cette droite perce le petit cercle de contact entre le cône et la sphère $C\omega D$. On a

$$Mc = MP + Pc = MC + c\omega \text{ (IV)}.$$

(*) Suivant l'usage, la même lettre désigne souvent une circonférence et le centre de cette ligne.

(**) Ce théorème, évident à l'inspection de la figure, est souvent attribué à Montferrand et à M. Quetelet : il paraît dû à M. Dupin. (*Correspondance*, tome II, p. 424.)

(***) *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Belgique*, tome II, p. 172. La sphère dont $C\omega D$ est la section principale, touche, en ω, le plan horizontal; elle touche le cône suivant le petit cercle dont la projection est CD; etc.

(IV) C'est ainsi que Dandelin démontre son curieux théorème.

Soient F, G les points où les génératrices principales MA, MB percent les *sphères* $A\alpha$, $B\beta$; tirons FG : il est visible que cette droite est parallèle à CD, et qu'*elle représente la section faite, dans le cône, par une sphère ayant son centre en* M. L'égalité précédente peut être écrite ainsi :

$$Mc = MF - \alpha\omega + c\omega;$$

ou, si l'on appelle r le rayon de la sphère S dont c est la trace horizontale :

$$Mc = r + MF.$$

Cette relation prouve que : 1° *la sphère décrite du point* M *comme centre, avec* MF *pour rayon, est tangente à toutes les sphères* S, *et, en particulier, aux sphères données;* 2° *le lieu des points de contact est la circonférence* FG; 3° *la sphère* FMG *est l'une des sphères* S; 4° *l'enveloppe des sphères* S *coïncide avec la surface engendrée par la circonférence* FG.

7. Les courbes H, E étant *conjuguées*, tout cône ayant pour base H et pour sommet un point de E est un cône de révolution (théorème connu). Il en est ainsi, en particulier, de celui dont le sommet serait c. Ce cône touche donc la sphère s suivant un petit cercle projeté en kl. Cette sphère s joue le rôle que jouait, tout à l'heure, la sphère S; non-seulement la surface cyclide, enveloppe de S, est l'enveloppe de s; mais cette surface peut aussi être engendrée par la circonférence kl. De plus, ces deux circonférences se coupent en un point situé sur la génératrice Mc, et dont les projections sont q', q.

8. Plans des circonférences génératrices. D'après un autre théorème connu, la droite FG passe par le centre R de *similitude directe* des circonférences $A\alpha$, $B\beta$; donc *les plans des circonférences* FG *se coupent tous suivant une même droite, projetée verticalement en* R. De même, *les plans des circonférences* kl *se coupent tous suivant une droite projetée horizontalement au point* r, *centre de* similitude inverse *des circonférences* $A\alpha$, $B\beta$.

9. Si F′, G′ sont les points où la droite FG, prolongée, rencontre de nouveau les circonférences $A\alpha$, $B\beta$, on a simultanément :

$$\frac{RF'}{RG} = \frac{R\alpha'}{R\beta'}, \quad \frac{RF}{RG'} = \frac{R\alpha'}{R\beta},$$

$$R\alpha'.R\alpha = RF'.RF; \quad RG.RG' = R\beta.R\beta';$$

relations d'où l'on conclut :

$$RF.RG = R\alpha.R\beta = R\alpha'.R\beta'.$$

Ainsi, *la droite* RR′ *est l'axe radical des circonférences* ω, Ω. On prouve, avec la même facilité, que rr′ *est l'axe radical des circonférences* A, B (*).

10. Autres modes de génération. Le triangle FMG étant isoscèle, les perpendiculaires en F, G, aux côtés égaux, sont égales; donc leur point de concours T est sur *rr′*. Ainsi, *le lieu des sommets* T *des triangles isoscèles* FTG *est la verticale* rr′. Mais ce triangle est la section principale d'un cône de révolution qui, évidemment, touche la cyclide en tous les points de la circonférence FG. Donc : *la cyclide est l'enveloppe d'un cône de révolution dont la section principale est tangente aux circonférences données* A, B, *et dont le sommet décrit l'axe radical de ces lignes.*

Pour la même raison, *la cyclide est l'enveloppe d'un cône* ktl, *dont la section principale est tangente aux circonférences* Ω, ω, *et dont le sommet décrit l'axe radical de ces lignes.*

11. Lignes de courbure. Les cônes FMG, *lck* étant *normaux* à la surface, les lignes de courbure sont les circonférences FG, *kl*. Ainsi, *dans la cyclide, les lignes de courbure de chaque système sont des cercles.* Ce beau théorème, dû à M. Dupin, a été complété ainsi par MM. Dupin et Mannheim : *toute surface, dans*

(*) Cette vérification est même inutile, attendu que les *deux systèmes de circonférences sont,* pour ainsi dire, *conjugués l'un de l'autre.*

laquelle les lignes de courbure de chaque système sont des cercles, est une cyclide.

12. NAPPES DE LA SURFACE. Soient, comme ci-dessus (**2**), c_1, c_2, c_3 trois circonférences données, sections principales des sphères données, s_1, s_2, s_3. Soient ω, Ω les deux circonférences conjuguées dont il a été question, tangentes à c_1 c_2, c_3. On a vu que le lieu des centres des circonférences tangentes à ω, Ω est une ellipse E, et qu'il en résulte, comme nappe de la cyclide, une *surface-canal ayant pour axe* E. La forme de cette nappe est à peu près celle d'un *tore à section méridienne variable.* Nous dirons, pour abréger, que cette nappe est un *tore elliptique.*

Soient maintenant ω, Ω_1 deux autres circonférences conjuguées, tangentes aux circonférences données.

Si une circonférence est tangente à ω_1, Ω_1, son centre se trouve, ou sur une ellipse E_1, ayant pour foyers les centres ω_1, Ω_1, et passant par les centres donnés ; ou sur une hyperbole H_1 (non tracée sur la figure), homofocale avec E_1. L'enveloppe de cette circonférence variable sera la section principale d'une nouvelle nappe de la cyclide. Mais c_1, c_2, c_3 doivent être trois positions particulières de cette circonférence; donc, d'après la disposition des données, *la deuxième nappe de la cyclide est un tore elliptique :* il en serait de même des nappes déterminées par les deux derniers systèmes de circonférences conjuguées. La même conclusion subsiste dans tous les cas, c'est-à-dire quelle que soit la disposition des sphères données. En effet, *chacune des nappes peut* toujours *être engendrée par une circonférence coupant orthogonalement deux circonférences données, de manière que son plan passe par l'un des centres de similitude;* et il est visible qu'une pareille génération ne peut donner lieu qu'à une surface limitée (*). Par exemple, dans la figure 2, bien que le centre de la sphère FMG parcoure *complétement* les deux branches de l'hyperbole H,

---

(*) Nous faisons, bien entendu, abstraction du cas où l'une des circonférences directrices se changerait en ligne droite.

l'intersection FG ne décrit que le tore elliptique considéré ci-dessus.

13. Lieux des centres des lignes de courbure. M. Mannheim a démontré que chacun de ces lieux est la podaire d'une des coniques E, F. Cette propriété résulte aussi de l'inspection de la figure. En effet, la bissectrice de l'angle FMG, tangente à l'hyperbole H, est perpendiculaire au milieu de FG.

. . . .

PROBLÈME D'ANALYSE INDÉTERMINÉE;

par M. S. Realis, ingénieur à Turin.

Assigner, d'une manière directe, une infinité de solutions entières de l'équation indéterminée

$$x^2 + y^2 - nz^2 = 1,$$

dans laquelle n *est un nombre de la forme* $p^2 + 1$.

Nous distinguerons deux cas, selon que n est pair ou impair. On a, dans le premier cas, pour $n = 2, 10, 26, 50, \ldots$:

$$(a^2 - 1)^2 + (a^2 + 2a)^2 - 2(a^2 + a)^2 = 1,$$

$$(5a^2 - 1)^2 + [5(3a^2 + 2a)]^2 - 10(5a^2 + 3a)^2 = 1,$$

$$(13a^2 - 1)^2 + [13(5a^2 + 2a)]^2 - 26(13a^2 + 5a)^2 = 1,$$

$$(25a^2 - 1)^2 + [25(7a^2 + 2a)]^2 - 50(25a^2 + 7a)^2 = 1,$$

. . . . ;