Cette équation se réduit à une identité dans le cas des enveloppes de sphères; mais, dans le cas général, elle donne lieu au théorème suivant :

Il existe, sur chaque génératrice, deux points où cette génératrice touche une ligne de courbure de la surface; s'il y en a plus de deux, la génératrice est elle-même une ligne de courbure.

8. Écrivons l'équation (16) sous la forme :

$$(v + \Delta k + ku)\cos^2\frac{\varphi}{2} - 2u\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - (v + \Delta k - ku)\sin^2\frac{\varphi}{2} = 0.$$

Pour que les deux points en question se confondent, c'est-à-dire, pour que le cercle soit osculateur à une ligne de courbure, il faut que l'on ait

$$u^2 + (v + \Delta k)^2 - k^2u^2 = 0.$$

On tombe ainsi sur l'équation (13). Nous pouvons donc énoncer ce dernier théorème :

La conique conjuguée se réduit à deux droites dans deux cas seulement :

1° *Lorsque la variation du rayon de la génératrice est nulle;*

2° *Lorsque cette génératrice est osculatrice à une ligne de courbure de la surface.*

DES CONIQUES SATISFAISANT A QUATRE CONDITIONS (*).

Nous croyons être utile à quelques-uns de nos jeunes lecteurs

(*) Note écrite à l'occasion d'une lettre de M. T., élève au Lycée de B.

en rappelant la méthode, bien simple, qui permet de résoudre les problèmes compris dans l'énoncé suivant :

Une conique satisfaisant à quatre (*) *conditions, trouver le lieu décrit par un de ses points remarquables* (centre, foyer, sommet, etc.).

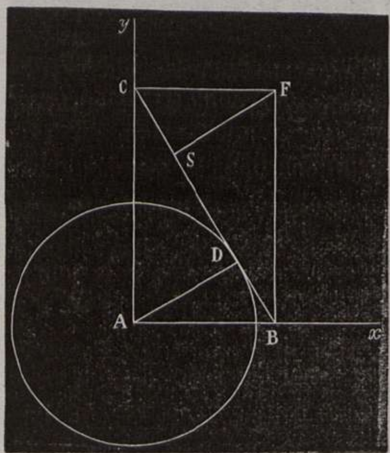
On peut la formuler ainsi :

Aux quatre éléments donnés, ajoutez-en un cinquième, propre à déterminer, facilement, le point remarquable dont on demande le lieu, et faites varier ce cinquième élément (**).

Appliquons cette règle à quelques exemples.

I. *Trouver le lieu décrit par le foyer d'une parabole donnée, tangente aux côtés d'un angle droit.*

On sait que : 1° *le lieu du sommet d'un angle droit, circonscrit à une parabole, est la directrice;* 2° *le lieu des projections du foyer, sur les tangentes, est la tangente au sommet.*



Cela posé, soit yAx l'angle droit donné. Si, du point A comme centre, avec un rayon égal au quart du paramètre donné, on décrit une circonférence; que l'on mène, à cette ligne, une tangente quelconque BDC; et que l'on achève le rectangle ABFC, le sommet F sera l'une des positions du foyer de la parabole mobile.

(*) Il faut lire *trois*, au lieu de *quatre*, si la courbe est une parabole.
(**) *Manuel des Candidats à l'École polytechnique*, t. I, p. 481.

Dès lors, l'équation demandée est

$$AB.AC = AD.BC,$$

ou

$$xy = \tfrac{1}{2}p.\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Remarque. L'axe de la parabole est la perpendiculaire abaissée, de F, sur AB. Si donc nous désignons par α, β les coordonnées du *sommet* S, et par φ l'angle variable DAB, nous aurons :

$$\alpha = CS\sin\varphi = BD\sin\varphi = \frac{1}{2}p\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi},$$

$$\beta = BS\cos\varphi = CD\cos\varphi = \frac{1}{2}p\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi};$$

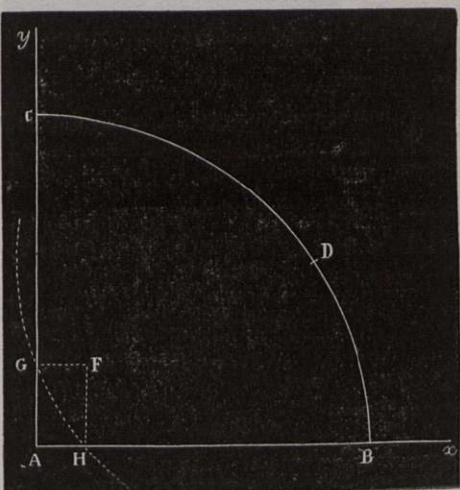
puis, par l'élimination de φ,

$$\left(\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}}\right)\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{2}{3}} = \tfrac{1}{4}p^2.$$

II. *Trouver le lieu décrit par les foyers d'une ellipse donnée, tangente aux côtés d'un angle droit.*

Lemmes. 1° *Le lieu du sommet d'un angle droit, circonscrit à une ellipse donnée, est une circonférence concentrique à l'ellipse, et dont le rayon égale* $\sqrt{a^2 + b^2}$;

2° *Le lieu des projections des foyers, sur les tangentes, est la circonférence décrite sur le grand axe, pris comme diamètre.*



D'après cela, xAy étant l'angle donné, le *lieu du centre* de l'ellipse mobile est la circonférence BC, dont le rayon AB égale

$\sqrt{a^2 + b^2}$: si, sur cette circonférence, on prend un point quelconque D, l'ellipse est déterminée. Du point D comme centre, avec a pour rayon, traçons une nouvelle circonférence; soient G, H deux de ses intersections avec les côtés de l'angle : le point F, quatrième sommet du rectangle AGFH, peut être regardé comme l'un des foyers de l'ellipse mobile.

α, β étant les coordonnées du centre mobile D, on a

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2. \quad \dots\dots \quad (1)$$

L'équation de la circonférence variable GH est

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = a^2;$$

ou, plus simplement,

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + b^2 = 0.$$

Si l'on y fait, successivement, $y = 0$, $x = 0$, on trouve les *équations du foyer* F :

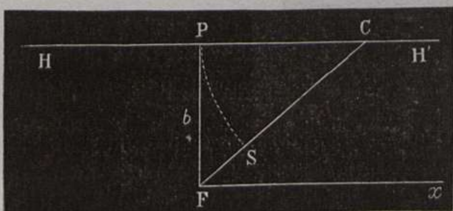
$$x^2 - 2\alpha x + b^2 = 0, \quad \dots\dots \quad (2)$$

$$y^2 - 2\beta x + b^2 = 0. \quad \dots\dots \quad (3)$$

Par conséquent, *l'équation du lieu des foyers* est

$$\frac{(x^2 + b^2)^2}{x^2} + \frac{(y^2 + b^2)^2}{y^2} = 4(a^2 + b^2)\ (*).$$

III. *Trouver le lieu des sommets des hyperboles qui ont un foyer commun*, F, *et une asymptote commune*, HH'.



Tout point C, de l'asymptote HH', peut être regardé comme le centre d'une des hyperboles considérées.

(*) Nous engageons les élèves à discuter cette équation, ou à construire la courbe : celle-ci est *pyriforme*.

Pour trouver le sommet S, correspondant au foyer donné, il faut, d'après une propriété connue, abaisser FP perpendiculaire à HH′, puis prendre $CS = CP = a$.

Si l'on mène Fx parallèle à HH′, l'équation demandée est donc

$$u = FC - CP = \frac{b}{\sin\omega} - b\cot\omega;$$

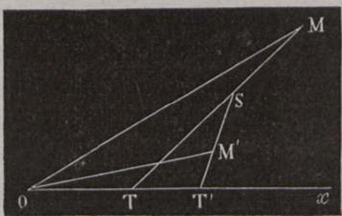
ou, simplement,

$$u = b\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\,\omega.$$

IV. *Trouver le lieu des centres des hyperboles équilatères, circonscrites à un triangle donné.*

LEMME. *Dans toute hyperbole équilatère, l'angle de deux diamètres est égal à l'angle de leurs cordes conjuguées.*

Soient, en effet : OM, OM′ deux demi-diamètres; MT, M′T′ les tangentes correspondantes; Ox l'axe transverse. La relation $mm' = 1$ prouve que



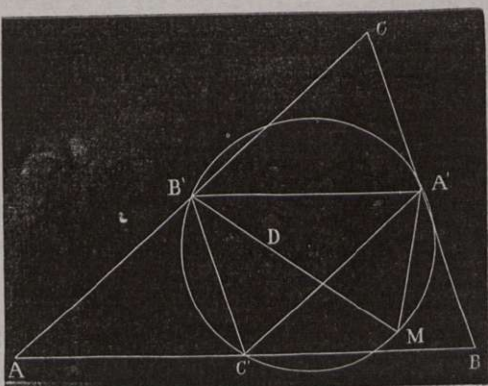
$$MTx = 1^d - MOx,$$
$$M'T'x = 1^d - M'Ox.$$

Par conséquent,

$$M'T'x - MTx = MOx - M'Ox,$$

ou

$$TST' = MOM'.$$



Soit maintenant ABC le triangle donné. Si, par le milieu B′ du côté AC, on mène arbitrairement B′D, et que l'on regarde cette droite comme le diamètre conjugué de la corde AC, l'hyperbole sera déterminée. Pour en construire le centre M, il faut, par le milieu A′ de BC, mener une droite AM qui coupe B′M sous un angle égal à C, ou égal à A′B′C′, C′ étant le milieu de AB.

Le lieu demandé est donc *la circonférence des neuf points, relative au triangle donné* (*).

Corollaires. — I. *Les hyperboles équilatères, circonscrites à un triangle* ABC, *passent par le point de concours des hauteurs.*

II. *Les circonférences des neuf points, relatives aux quatre triangles* ABC, BCD, CDA, ADB, *dans lesquels se décompose un quadrilatère* ABCD, *se coupent en un même point* (théorème connu). (E. Catalan.)

NOTES SUR DIVERS ARTICLES DE LA NOUVELLE CORRESPONDANCE;

par M. H. Brocard.

(*Suite*, voir t. II, pp. 115, 310; t. III, p. 139 et t. IV, pp. 45, 135.)

30. Les deux théorèmes indiqués dans les *Questions* 356, 357, et démontrés dans le t. IV, pp. 249, 251, ont donné lieu à diverses remarques de M. Catalan, auxquelles je crois devoir ajouter les renseignements suivants.

On trouve, dans les *Nouvelles Annales* (2e série, t. II, p. 391, 1863) l'énoncé de ces théorèmes, donné par M. L. Autos,

(*) Théorème connu (*Manuel des Candidats*, t. I, p. 482). Cette élégante solution et les corollaires suivants, m'ont été communiqués par M. Neuberg.