Question 584.

Une surface de révolution autour de l'axe z, *en coordonnées rectangulaires, est définie par l'équation*

$$z = f(r),$$

r *étant la distance d'un point de la surface à l'axe de rotation. Trouver l'équation différentielle, en coordonnées polaires, des projections, sur le plan* xy, *des courbes tracées sur cette surface et qui jouissent de la propriété que le plan osculateur, en chacun des points de l'une d'elles, comprenne la normale à la surface au même point. Prendre* r *pour variable indépendante.*

(Examen de licence. — Lille.)

PREMIÈRE SOLUTION.

Si l'on pose :

$$A = dyd^2z - dzd^2y,$$
$$B = dzd^2x - dxd^2z,$$
$$C = dxd^2y - dyd^2x,$$

l'équation du plan osculateur, en un point M (x, y, z)) d'une courbe, est

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0;$$

et les équations de la normale à la surface, au même point, sont

$$X - x + \frac{dz}{dx}(Z - z) = 0,$$

$$Y - y + \frac{dz}{dy}(Z - z) = 0.$$

---

démontre diverses propositions, parmi lesquelles on peut signaler celle-ci :

La somme des produits $n - 3$ *à* $n - 3$, *des nombres* $2, 3, \ldots (n - 1)$, *est divisible par le nombre* n, *supposé non premier :*

1° *Si* n *est impair;*

2° *Si,* n *étant pair,* $\frac{n}{2}$ *est un nombre composé, supérieur à* 4. (E. C.)

La normale sera dans le plan osculateur si

$$A\frac{dz}{dx}+B\frac{dz}{dy}-C=0.$$

Or, en désignant par θ l'angle que fait, avec l'axe des x, la projection, sur le plan xy, de la droite qui joint l'origine au point M, on a :

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta;$$

d'où

$$\frac{dx}{dr}=\cos\theta-r\sin\theta\frac{d\theta}{dr},\quad \frac{d^2x}{dr^2}=-2\sin\theta\frac{d\theta}{dr}-r\cos\theta\frac{d\theta^2}{dr^2}-r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dr^2},$$

$$\frac{dy}{dr}=\sin\theta+r\cos\theta\frac{d\theta}{dr},\quad \frac{d^2y}{dr^2}=2\cos\theta\frac{d\theta}{dr}-r\sin\theta\frac{d\theta^2}{dr^2}+r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dr^2}.$$

Par suite :

$$A=\frac{d^2z}{dr^2}\left(\sin\theta+r\cos\theta\frac{d\theta}{dr}\right)-\frac{dz}{dr}\left(2\cos\theta\frac{d\theta}{dr}-r\sin\theta\frac{d\theta^2}{dr^2}+r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dr^2}\right),$$

$$B=-\frac{d^2z}{dr^2}\left(\cos\theta+r\sin\theta\frac{d\theta}{dr}\right)-\frac{dz}{dr}\left(2\sin\theta\frac{d\theta}{dr}+r\cos\theta\frac{d\theta^2}{dr^2}+r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dr^2}\right),$$

$$C=\left(\cos\theta-r\sin\theta\frac{d\theta}{dr}\right)\left(2\cos\theta\frac{d\theta}{dr}-r\sin\theta\frac{d\theta^2}{dr^2}+r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dr^2}\right)$$
$$+\left(\sin\theta+r\cos\theta\frac{d\theta}{dr}\right)\left(2\sin\theta\frac{d\theta}{dr}+r\cos\theta\frac{d\theta^2}{dr^2}+r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dr^2}\right).$$

D'ailleurs :

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dr}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dr}\cos\theta,\quad \frac{dz}{dy}=\frac{dz}{dr}\cdot\frac{dr}{dy}=\frac{dz}{dr}\sin\theta;$$

donc

$$A\frac{dz}{dx}+B\frac{dr}{dy}-C=\frac{dz}{dr}(A\cos\theta+B\sin\theta)-C.$$

Mais

$$A\cos\theta + B\sin\theta = rf''(r)\frac{d\theta}{dr} + f'(r)\left(2\frac{d\theta}{dr} + r\frac{d^2\theta}{dr^2}\right),$$

$$C = 2\frac{d\theta}{dr} + r^2\frac{d\theta^3}{dr^3} + r\frac{d^2\theta}{dr^2}.$$

L'équation différentielle des courbes est donc :

$$rf'(r)f''(r)\frac{d\theta}{dr} + f'^2(r)\left(2\frac{d\theta}{dr} + r\frac{d^2\theta}{dr^2}\right) - 2\frac{d\theta}{dr} - r^2\frac{d\theta^3}{dr^3} - r\frac{d^2\theta}{dr^2} = 0,$$

ou

$$r\frac{d^2\theta}{dr^2}\left[1 + f'^2(r)\right] + \frac{d\theta}{dr}\left[2 + 2f'^2(r) - rf'(r)f''(r)\right] + r^2\frac{d\theta^3}{dr^3} = 0.$$

(E. Fauquembergue.)

SECONDE SOLUTION (*).

1. Quand l'équation de la surface est

$$F(x, y, z) = 0,$$

les lignes géodésiques sont représentées par

$$\frac{d\cdot\frac{dx}{ds}}{\frac{dF}{dx}} = \frac{d\cdot\frac{dy}{ds}}{\frac{dF}{dy}} \text{ (**)}.$$

(*) Solution connue : voir, par exemple, une Thèse de M. Roger (*Journal de Liouville*, 1848). La courbe qui jouit de la propriété énoncée est le *plus court chemin* sur la surface donnée : on l'appelle *ligne géodésique*. Cette courbe est, en même temps, la trajectoire d'un point matériel, sur lequel aucune force n'agit, et qui serait assujetti à se mouvoir sur la surface.

(**) Les cosinus directifs de la *binormale* à la courbe sont proportionnels à

$$d\cdot\frac{dx}{ds},\quad d\cdot\frac{dy}{ds},\quad d\cdot\frac{dz}{ds};$$

2. Dans le cas particulier considéré,

$$F = z - f(u), \quad u = \sqrt{x^2 + y^2};$$

donc la seconde équation se réduit à

$$\frac{d \cdot \frac{dx}{ds}}{x} = \frac{d \cdot \frac{dy}{ds}}{y};$$

ou plutôt, à

$$xd.\frac{dy}{ds} - yd.\frac{dx}{ds} = 0. \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Cette équation différentielle est du deuxième ordre; mais on peut, immédiatement, en trouver une intégrale. En effet, le premier membre est la différentielle de

$$x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds};$$

donc

$$xdy - ydx = kds, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

k étant une constante arbitraire.

3. La distance u représente le rayon vecteur de la projection m, sur le plan xy, du point M. Si ω est l'angle mOx, on a donc

$$x = u \cos \omega, \quad y = u \sin \omega, \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} dx &= \cos \omega du - u \sin \omega d\omega, \\ dy &= \sin \omega du + u \cos \omega d\omega, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

$$xdy - ydx = u^2 d\omega, \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

$$ds^2 = u^2 d\omega^2 + du^2 + dz^2,$$

---

les cosinus directifs de la normale à la surface sont proportionnels à

$$\frac{dF}{dx}, \quad \frac{dF}{dy}, \quad \frac{dF}{dz};$$

etc. (*Cours d'Analyse de l'Université de Liége*).

ou

$$ds^2 = u^2 d\omega^2 + (1 + f'^2) du^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation (2) devient d'abord

$$u^2 d\omega = k ds, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

puis

$$u^4 d\omega^2 = k^2 \left[u^2 d\omega^2 + (1 + f'^2) du^2 \right].$$

On peut remplacer celle-ci par la formule

$$d\omega = k \frac{\sqrt{1 + f'^2}}{u\sqrt{u^2 - k^2}} du, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

dans laquelle les *variables sont séparées*. On a donc, finalement,

$$\omega - \omega_0 = k \int_{u_0}^{u} \frac{du}{u} \sqrt{\frac{1 + f'^2}{u^2 - k^2}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

équation qui représente la *projection de la géodésique.*

4. Remarque. L'équation (7), analogue à celle qui constitue le *principe des aires,* peut être interprétée ainsi :

L'aire décrite, sur le plan xy, *par le rayon vecteur* Om, *est proportionnelle à la longueur de la trajectoire.*

5. Autre remarque. Cette longueur a pour expression, d'après les formules (7), (8) :

$$s - s_0 = \int_{u_0}^{u} u du \sqrt{\frac{1 + f'^2}{u^2 - k^2}}.$$

(E. C.)