Question 384.

Dans toute conique, le diamètre conjugué de la bissectrice de l'angle des axes coupe la courbe en P. *La normale en* P *détermine le segment dont l'aire est un minimum* (*). (LEMOINE.)

(*) Le problème a été traité dans les *Nouvelles Annales*, tome III, 1844.

I. A une ellipse AB (*), menons une normale *mnm'*, de manière que le segment *mAm'* soit *maximum* (**).

En multipliant par $\frac{a}{b}$ toutes les ordonnées, on remplace l'ellipse par le cercle principal AB' : *mnm'* devient une droite M*n*M', à déterminer.

II. φ étant l'anomalie, les coordonnées de *m* sont

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi.$$

L'équation de la normale *mn* est

$$y - b\sin\varphi = \frac{a\sin\varphi}{b\cos\varphi}(x - a\cos\varphi).$$

Pour trouver l'équation de M*n*, il suffit de remplacer y par $\frac{b}{a}y$. On a donc

$$y - a\sin\varphi = \frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}\varphi(x - a\cos\varphi).$$

III. Soit

$$\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\theta, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

de manière que θ est l'angle formé par M*n*M' avec le rayon CA.

L'angle MCM', supplément de CM*n*, a pour valeur

$$C = \pi - 2(\theta - \varphi). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

D'un autre côté, l'aire du segment MAM' est

$$u = \tfrac{1}{2}a^2(C - \sin C). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

(**) Si l'un des segments déterminés par la corde *mm'* est *maximum*, il est clair que l'autre est *minimum*.

La condition $du = 0$ donne

$$(1 - \cos C)dC = 0. \qquad (4)$$

Si l'on égale à zéro le premier facteur, on trouve $C = 0$, valeur qui ne répond pas, *directement*, à la question. On doit donc faire $dC = 0$, ou

$$d\theta = d\varphi. \qquad (5)$$

IV. On conclut, de là, en différenciant l'équation (1) :

$$\frac{b}{\cos\theta} = \frac{a}{\sin\varphi}; \qquad (6)$$

puis

$$b \sin\theta = a \sin\varphi; \qquad (7)$$

et enfin

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{a}{b} \text{ (*)}.$$

V. Si l'on désigne par φ', θ' les angles mCA, mnA, on a

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{b^2}{a^2}, \quad \operatorname{tg}\theta' = 1.$$

Cette dernière valeur permet d'énoncer ainsi le théorème de M. Lemoine :

Dans l'ellipse, la normale qui détermine le segment maximum, est également inclinée sur les axes (**). (E. C.)

Autre solution par M. Jamet.

(*) Ainsi, *les angles* φ, θ *sont complémentaires.*

(**) Propriété connue.