Question 578.

Ayant posé

$$S_{n,\alpha} = 1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha$$

et

$$\sigma_{\alpha,\beta} = S_{1,\alpha} + 2^\beta S_{2,\alpha} + 3^\beta S_{3,\alpha} + \cdots + n^\beta S_{n,\alpha},$$

démontrer la relation

$$\sigma_{\alpha,\beta} + \sigma_{\beta,\alpha} = S_{n,\alpha}.S_{n,\beta} - S_{n,\alpha+\beta}.$$

(E. CESARO.) (*)

L'égalité à vérifier est

$$\left.\begin{array}{r} S_{1,\alpha} + 2^\beta S_{2,\alpha} + 3^\beta S_{3,\alpha} + \cdots + n^\beta S_{n,\alpha} \\ + S_{1,\beta} + 2^\alpha S_{2,\beta} + 3^\alpha S_{3,\beta} + \cdots + n^\alpha S_{n,\beta} \end{array}\right\} = S_{n,\alpha}.S_{n,\beta} + S_{n,\alpha+\beta}. \quad (1)$$

Lorsque $n = 1$, les deux membres se réduisent à $1 + 1$. Voyons donc si cette égalité, supposée vraie, subsiste quand on y change n en $n + 1$. En faisant ce changement, et en retranchant de part et d'autre (**), on trouve

$$(n+1)^\beta S_{n+1,\alpha} + (n+1)^\alpha S_{n+1,\beta} = S_{n+1,\alpha}.S_{n+1,\beta} - S_{n,\alpha}.S_{n,\beta} + (n+1)^{\alpha+\beta};$$

ou

$$(n+1)^\beta \left[S_{n,\alpha} + (n+1)^\alpha\right] + (n+1)^\alpha \left[S_{n,\beta} + (n+1)^\beta\right] =$$
$$\left[S_{n,\alpha} + (n+1)^\alpha\right]\left[S_{n,\beta} + (n+1)^\beta\right] - S_{n,\alpha}.S_{n,\beta} + (n+1)^{\alpha+\beta};$$

ce qui est identique. (E. C.)

Autre solution par M. Émile Colart, élève de l'École normale des sciences (Gand).

(*) Il y a une erreur dans l'énoncé proposé par M. CESARO.

(E. COLART.)

Probablement, par suite d'une simple faute typographique. (E. C.)

(**) Ce qui revient à prendre les *différences* des deux membres.