la distance qui les sépare. Si L, M, N sont trois points équidistants sur la droite, décrivant des courbes fermées, dont les aires soient $\lambda$, $\mu$, $\nu$, on aura $\mu = \frac{\lambda+\nu}{r}$; etc....

Mais nous ne voulons pas pousser plus avant ces considérations exclusivement théoriques; nous avons tenu à indiquer, simplement, quelques conséquences de l'ingénieuse conception servant de base à la théorie du planimètre polaire de M. Amsler.

(*La suite prochainement.*)

## DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE LA FORMULE DE STIRLING;

d'après M. J. W. L. Glaisher, F. R. S,

par M. P. Mansion, professeur à l'Université de Gand (*).

### I

### Formule fondamentale.

Considérons l'expression

$$f(x) = \left(\frac{3+x}{3-x}\right)^3 \left(\frac{5+x}{5-x}\right)^5 \cdots \left(\frac{2n+1+x}{2n+1-x}\right)^{2n+1}.$$

(*) *Proof of Stirling's Theorem*, by J. W. L. Glaisher F. R. S. (*Quarterly Journal of Mathematics*, n° 57, 1877, pp. 57-63). *Addition* by Professor Cayley (*Ibid.*, pp. 63-64). Nous complétons la démonstration des savants anglais en prouvant que 1.2.3....$n$ est compris *entre* les deux valeurs approchées trouvées par eux. Du reste, le principe qui donne la formule fondamentale peut servir à trouver les valeurs d'un grand nombre de produits indéfinis.

Prenons les logarithmes népériens des deux membres :

$$\mathrm{l}f(x) = 3\,\mathrm{l}\,\frac{1+\dfrac{x}{3}}{1-\dfrac{x}{3}} + 5\,\mathrm{l}\,\frac{1+\dfrac{x}{5}}{1-\dfrac{x}{5}} + \cdots + (2n+1)\,\mathrm{l}\,\frac{1+\dfrac{x}{2n+1}}{1-\dfrac{x}{2n+1}}.$$

Développant chacun des logarithmes en série, par la formule connue, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{l}f(x) = 2nx &+ 2\left[\frac{1}{3}\frac{x^3}{3^2} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{3^4} + \cdots\right]\\ &+ 2\left[\frac{1}{3}\frac{x^3}{5^2} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{5^4} + \cdots\right]\\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\\ &+ 2\left[\frac{1}{3}\frac{x^3}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{(2n+1)^4} + \cdots\right].\end{aligned}$$

En particulier

$$\mathrm{l}f(1) = 2n + 2u,$$

ou

$$f(1) = e^{2n+2u},$$

si l'on pose

$$\begin{aligned}u = &\left[\frac{1}{3}\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{3^4} + \cdots\right]\\ + &\left[\frac{1}{3}\frac{1}{5^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{5^4} + \cdots\right]\\ + &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\\ + &\left[\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right].\end{aligned}$$

D'autre part, l'expression qui définit $f(x)$ devient, pour $x = 1$,

$$f(1) = \left(\frac{2}{1}\right)^3\left(\frac{3}{2}\right)^5\left(\frac{4}{3}\right)^7 \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n+1} = \frac{(n+1)^{2n+1}}{(1.2.3\ldots n)^2}.$$

En égalant les deux valeurs de $f(1)$, on trouve :

$$e^{2n+2u} = \frac{(n+1)^{2n+1}}{(1.2.3\ldots n)^2};$$

d'où

$$1.2.3\ldots n = (n+1)^{n+\frac{1}{2}} e^{-n-u} = n^{n+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-n-u}.$$

Mais

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} = e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}\left(1+\frac{1}{n}\right)};$$

donc

$$1.2.3\ldots n = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}\left(1+\frac{1}{n}\right)-u}.$$

Nous allons prouver que le dernier facteur est compris entre $\sqrt{2\pi}$ et $\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{1}{12n}}$.

## II

### Valeur approchée de $u$.

La quantité $u$ est la somme de $n$ séries. La première,

$$\frac{1}{3}\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{3^4}+\frac{1}{7}\frac{1}{3^6}+\cdots,$$

est moindre que

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^6}+\cdots\right]=\frac{1}{3}\frac{1}{3^2-1}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right).$$

Les $(n-1)$ suivantes sont, respectivement, moindres que

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right),\quad \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right),\quad \ldots,\quad \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right).$$

La quantité $u$ est donc inférieure à

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}\right)=\frac{1}{12}-\frac{1}{12n+12}.$$

Considérons maintenant

$$\begin{aligned} v = &\left[\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+3)^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+3)^4}+\cdots\right] \\ &+\left[\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+5)^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+5)^4}+\cdots\right] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\left[\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+2p+1)^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+2p+1)^4}+\cdots\right]. \end{aligned}$$

On trouve sans peine, comme ci-dessus,

$$v < \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+2p+2}\right).$$

Par conséquent,

$$u + v < \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2p+2}\right).$$

Si, $n$ étant fixe, $p$ croît indéfiniment, $u + v$ tend vers une limite C, indépendante de $n$ et de $p$, et inférieure à $\frac{1}{12}$. En même temps, $v$ tend vers une limite plus petite que

$$\frac{1}{6}\,\frac{1}{2n+2} = \frac{1}{12n+12} = \frac{1}{12n}\,\frac{1}{1+\frac{1}{n}}.$$

A cause de lim. $v = \mathrm{C} - u$, on a donc

$$0 < \mathrm{C} - u < \frac{1}{12n}\,\frac{1}{1+\frac{1}{n}};$$

c'est-à-dire, si $n$ est supérieur à 1,

$$-\mathrm{C} < -u < -\mathrm{C} + \frac{1}{12n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{12n^3} - \text{etc.};$$

et, si $n = 1$ :

$$-\mathrm{C} < -u < -\mathrm{C} + \frac{1}{24}.$$

Ces inégalités vont nous en donner d'autres, plus importantes.

## III

### Valeur approchée de $(n + \frac{1}{2})\,\mathrm{l}(1 + \frac{1}{n}) - u$.

On a, $n$ étant égal ou supérieur à 1,

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \text{etc.}\right)$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2.2}\right)\frac{1}{n^2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2.3}\right)\frac{1}{n^3} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2.4}\right)\frac{1}{n^4} - \text{etc.}$$

$$= 1 + \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{12n^3} + \frac{3}{40n^4} - \text{etc.};$$

car le terme général du second membre est

$$\pm\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k}\right)\frac{1}{n^k}=\pm\frac{k-1}{2k(k+1)}\frac{1}{n^k}.$$

Même pour $n=1$, les termes de ce développement vont en décroissant, en valeur absolue, à partir du troisième. En effet, le rapport de deux termes consécutifs, pris positivement, est

$$\frac{k^2}{(k-1)(k+2)}\times\frac{1}{n}=\frac{k^2}{k^2+k-2}\times\frac{1}{n},$$

quantité inférieure à l'unité, si $k$ est égal ou supérieur à 3. On peut donc écrire, même pour $n=1$,

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{12n^2}-\frac{1}{12n^3}+\frac{3}{40n^4}-\text{etc.}$$

Par suite (II) :

$$1-C<\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}\left(1+\frac{1}{n}\right)-u<1-C+\frac{1}{12n}-w:$$

$$w=\left(\frac{1}{12}-\frac{3}{40}\right)\frac{1}{n^4}-\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{15}\right)\frac{1}{n^5}+\cdots$$

Le terme général de la série $w$ est

$$(-1)^k\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{2k}-\frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{n^k}=(-1)^k\frac{(k-2)(k-3)}{12k(k+1)}\frac{1}{n^k},$$

$k$ étant au moins égal à 4. Le rapport de deux termes consécutifs, pris positivement,

$$\frac{(k-1)(k-2)k(k+1)}{(k-2)(k-3)(k+1)(k+2)}\frac{1}{n}=\frac{k(k-1)}{(k+2)(k-3)}\frac{1}{n}=\left(1+\frac{6}{k^2-k-6}\right)\frac{1}{n},$$

va sans cesse en diminuant, si $k$ augmente. Lorsque $n=2$, il est égal à 1, pour $k=4$; inférieur à 1, pour les autres valeurs de $k$. La série $w$, dont les termes vont toujours en décroissant, en valeur absolue, et sont alternativement positifs et négatifs, a donc une somme positive. Par conséquent, $n$ surpassant l'unité, on a

$$1-\mathrm{C}<\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}\left(1+\frac{1}{n}\right)-u<1-\mathrm{C}+\frac{1}{12n}.$$

La même propriété subsiste pour $n=1$. On a, dans ce cas, comme le prouve un calcul direct, à cause de $\mathrm{l}2=0{,}69315$ :

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}\left(1+\frac{1}{n}\right)<1{,}04<1+\frac{1}{24};$$

puis

$$1-\mathrm{C}<\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}\left(1+\frac{1}{n}\right)-u<1-\mathrm{C}+\frac{1}{12}.$$

Donc, pour toute valeur entière de $n$,

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}\left(1+\frac{1}{n}\right)-u=1-\mathrm{C}+\frac{\theta}{12n},$$

$\theta$ étant compris entre 0 et 1.

## IV

### Détermination de la constante.

D'après le paragraphe précédent, la formule fondamentale devient

$$1.2.3\ldots n=e^{1-\mathrm{C}}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n+\frac{\theta}{12n}};$$

ou, en prenant les logarithmes des deux membres, et posant $1-\mathrm{C}=\mathrm{G}$ :

$$\mathrm{l}(1.2.3\ldots n)=\mathrm{G}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}n-n+\frac{\theta}{12n}.\quad.\quad.\quad(1)$$

De même, $\theta'$ étant compris entre 0 et 1,

$$\mathrm{l}(1.2.3\ldots\overline{2n-1}.2n)=\mathrm{G}+\left(2n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}2n-2n+\frac{\theta'}{12.2n},$$

ou

$$l(1.2.3\ldots\overline{2n-1}.2n)=G+\left(2n+\frac{1}{2}\right)ln+\left(2n+\frac{1}{2}\right)l2-2n+\frac{\theta}{24n}.(2)$$

Ajoutons, aux deux membres de l'égalité (1), $l(2^n)=n(l2)$; il viendra

$$l(2.4.6\ldots 2n)=G+\left(n+\frac{1}{2}\right)ln+nl2-n+\frac{\theta}{12n}. \quad (3)$$

Donc, par soustraction,

$$l(1.3.5\ldots\overline{2n-1})=nln+\left(n+\frac{1}{2}\right)l2-n+\frac{\theta'-2\theta}{24n}; \quad (4)$$

puis :

$$l\left(\frac{2.4.6\ldots\ldots 2n}{1.3.5\ldots\overline{2n-1}}\right)=G+\frac{1}{2}ln-\frac{1}{2}l2+\frac{4\theta-\theta'}{24n}. \quad (5)$$

Doublons les deux membres de la dernière égalité, puis retranchons $l(2n)=ln+l2$. Le résultat est

$$l\left(\frac{2.2.4.4.6.6\ldots\overline{2n-2}.\overline{2n-2}.2n}{1.3.3.5.5.7\ldots\overline{2n-3}.\overline{2n-1}.\overline{2n-1}}\right)=2G-2l2+\frac{4\theta-\theta'}{12n}.(6)$$

Si $n$ croît indéfiniment, on a, d'après la formule de Wallis, (Duhamel, *Calcul intégral*, n° 69; Serret, *Trigonométrie*, n° 188),

$$\frac{\pi}{2}=\lim\frac{2.2.4.4\ldots\overline{2n-2}.2n}{1.3.3.5\ldots\overline{2n-1}.\overline{2n-1}}.$$

La relation (6) donne donc

$$l\left(\frac{\pi}{2}\right)=2G-2l2,$$

ou

$$G=l2+\frac{1}{2}l\left(\frac{\pi}{2}\right)=l\sqrt{2\pi}.$$

Par conséquent,

$$e^G=e^{1-C}=e^{l\sqrt{2\pi}}=\sqrt{2\pi};$$

et, finalement,

$$1.2.3\ldots n=\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n+\frac{\theta}{12n}};$$

ce qui est la formule de Stirling, sous sa forme élémentaire.

M. J. SERRET a donné, de cette formule célèbre, une démonstration très-élégante (*), qui, de même que la précédente, repose uniquement sur la formule de Wallis, et le développement de $l(1+x)$ en série, pour $x^2<1$; mais elle est moins naturelle, et le principe en est moins fécond. Toutes les autres démonstrations sont basées sur des recherches très-délicates, relatives à la théorie des intégrales définies. La plus simple, insérée par M. LIOUVILLE à la fin des *Leçons d'Analyse* de Navier (**) est loin d'être rigoureuse; et, quand on y fait les modifications nécessaires pour la rendre inattaquable, on lui fait perdre son caractère élémentaire.

NOTES DU RÉDACTEUR. — I. Cette démonstration *élémentaire* est, on doit l'avouer, longue et difficile. De toutes les démonstrations de la *formule de Stirling*, la plus simple, sans contredit, est celle que M. Serret a insérée à la suite du *Calcul intégral* de Lacroix (1862, t. II). On en trouve une autre, plus complète, dans les *Mélanges mathématiques*.

II. Si nous avons publié la Note de M. Glaisher, c'est à cause de la *formule fondamentale*. Comme le fait observer M. Mansion, l'idée du savant Géomètre anglais est souvent applicable. Parmi les produits indéfinis remarquables, citons seulement celui-ci :

$$\frac{2}{1}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{6.8}{5.7}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{10.12.14.16}{9.11.13.15}\right)^{\frac{1}{8}}\cdots,$$

dont la limite est le nombre $e$ (***).

---

(*) *Cours de Calcul différentiel et intégral;* t. II, pp. 206-213.

(**) *Résumé des Leçons d'Analyse données à l'École polytechnique, par* M. NAVIER, *suivi de Notes, par* M. J. LIOUVILLE; Paris, Carilian-Gœury et Ve Dalmont. 1840; t. II, Note IV, pp. 332-339.

(***) *Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet* (JOURNAL DE RESAL, t. I).

III. D'après les dernières formules des paragraphes III et IV :

$$\lim\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]-\lim u=1-\mathrm{C}=\frac{1}{2}\mathrm{l}(2\pi).$$

Mais :

$$\lim\left[n\mathrm{l}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=\mathrm{l}e=1,\quad \lim\left[\mathrm{l}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=0;$$

donc

$$\lim u=1-\tfrac{1}{2}\mathrm{l}(2\pi),$$

ou bien

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{5(2n+1)^4}+\frac{1}{7(2n+1)^6}+\cdots\right]=1-\tfrac{1}{2}\mathrm{l}(2\pi).$$

Ainsi, la *série double*, contenue dans le premier membre, a une limite remarquable.

IV. Pour la transformer en série *simple*, il suffit d'employer la formule connue

$$\frac{1}{3^{2p}}+\frac{1}{5^{2p}}+\frac{1}{7^{2p}}+\cdots=-1\pm \mathrm{B}_{2p-1}\frac{(2^{2p}-1)\pi^{2p}}{1.2\ldots 2p},$$

dans laquelle $\mathrm{B}_{2p-1}$ est le $p^e$ nombre de Bernoulli. On trouve

$$\left[-\frac{1}{3}+\mathrm{B}_1\frac{(2^2-1)\pi^2}{1.2.3}\right]+\left[-\frac{1}{5}-\mathrm{B}_3\frac{(2^4-1)\pi^4}{1.2.3.4.5}\right]$$
$$+\left[-\frac{1}{7}+\mathrm{B}_5\frac{(2^6-1)\pi^6}{1.2\ldots 7}\right]+\cdots=1-\frac{1}{2}\mathrm{l}(2\pi),$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{e^{2x}-1}\,\frac{x(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})}{x^2}\,dx=2-\mathrm{l}(2\pi);$$

etc.

V. La formule de Stirling, *complète*, est, comme l'on sait,

$$1.2.3\ldots n=n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon_n),$$

$\varepsilon_n$ ayant pour limite zéro. De plus,

$$1+\varepsilon_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2n+1}{2n}\,\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{2n+3}{2n+2}\cdots\right]^{\frac{1}{2}}\times\left[\frac{2n+2}{2n+1}\cdots\frac{4n}{4n-1}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\left[\frac{4n+2}{4n+1}\cdots\frac{8n}{8n-1}\right]^{\frac{1}{4}}\times\cdots\ (^*).$$

## SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES.

### Question 304.

*Démontrer que : 1° les surfaces représentées par les équations*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{\alpha^2}{x^2}+\frac{\beta^2}{y^2}+\frac{\gamma^2}{z^2}=1$$

*admettent huit points de contact, si la condition*

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}=1$$

*est remplie; 2° si l'on mène, en ces points, les plans tangents, on détermine un corps dont les faces opposées sont semblables et parallèles, et dont le volume a pour expression*

$$\frac{4}{3}\frac{(abc)^{\frac{3}{2}}}{(\alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{2}}}.$$

(Todhunter.)

Les plans tangents à ces surfaces ont respectivement pour équations :

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\frac{Zz}{c^2}=1,\quad \frac{\alpha^2 X}{x^3}+\frac{\beta^2 Y}{y^3}+\frac{\gamma^2 Z}{z^3}=1,$$

$x$, $y$, $z$ désignant les coordonnées du point de contact.

(*) *Journal de Resal*, tome I, p. 233.