SUR LES TRIANGLES HOMOLOGIQUES;

par M. Neuberg.

---

1. Soient

$$f(x, y, z) = A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{23}yz + 2A_{31}zx + 2A_{12}xy = 0,$$

l'équation d'une conique S rapportée au triangle de référence ABC; f_1, f_2, f_3 les moitiés des dérivées partielles de $f(x, y, z)$.

Les polaires des points A, B, C, représentées par (*)

$$f_1 = A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z = 0,$$
$$f_2 = A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z = 0,$$
$$f_3 = A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z = 0,$$

forment un triangle A'B'C', appelé *polaire* de ABC par rapport à S. Les points d'intersection des côtés correspondants des deux triangles sont déterminés par les équations

$$x = 0, \quad f_1 = 0; \quad y = 0, \quad f_2 = 0; \quad z = 0, \quad f_3 = 0;$$

auxquelles on peut substituer :

$$x = 0, \quad \frac{y}{A_{13}} + \frac{z}{A_{12}} = 0;$$

$$y = 0, \quad \frac{x}{A_{23}} + \frac{z}{A_{21}} = 0;$$

$$z = 0, \quad \frac{x}{A_{32}} + \frac{y}{A_{31}} = 0.$$

(*) Pour plus de symétrie, on écrit indifféremment A_{12} ou A_{21}, A_{13} ou A_{31}, A_{23} ou A_{32}.

On voit facilement que ces points sont situés sur la droite représentée par

$$\frac{x}{A_{23}} + \frac{y}{A_{31}} + \frac{z}{A_{12}} = 0.$$

Par conséquent : 1° *Deux triangles polaires réciproques par rapport à une conique sont homologiques; 2° l'un de ces triangles étant pris pour triangle de référence, les coordonnées de l'axe d'homologie* (*) *sont inversement proportionnelles aux coefficients des rectangles des variables dans l'équation de la conique.*

2. Si, entre les équations de A'C' et B'C', on élimine z, on trouve, pour l'équation de la droite CC',

$$\begin{vmatrix} A_{11}x + A_{12}y, & A_{13} \\ A_{21}x + A_{22}y, & A_{23} \end{vmatrix} = 0;$$

ce qui revient à

$$-B_{23}x + B_{31}y = 0;$$

B_{11}, B_{12},... désignant les mineurs du déterminant

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

De même, les droites AA', BB' peuvent être représentées par

$$-B_{31}y + B_{12}x = 0, \quad -B_{12}z + B_{23}x = 0.$$

On en conclut que AA', BB', CC' se coupent en un même point (le centre d'homologie des triangles ABC, A'B'C') dont les coordonnées sont inversement proportionnelles à B_{23}, B_{31}, B_{12}.

(*) Nous considérons comme coordonnées d'une droite (coordonnées tangentielles) les coefficients de son équation en coordonnées ponctuelles.

Mais l'équation de S, en coordonnées tangentielles, est

$$B_{11}\lambda^2 + B_{22}\mu^2 + B_{33}\nu^2 + 2B_{23}\mu\nu + 2B_{31}\nu\lambda + 2B_{12}\lambda\mu = 0;$$

par conséquent : *étant donnés deux triangles polaires réciproques par rapport à une conique, si l'on prend l'un d'eux pour triangle de référence, les coordonnées du centre d'homologie sont inversement proportionnelles aux coefficients des rectangles des variables dans l'équation de la courbe en coordonnées tangentielles.*

3. *Deux triangles homologiques* ABC, A'B'C' *sont toujours polaires réciproques par rapport à une certaine conique.*

En effet, prenons ABC pour triangle de référence, et soit

$$u = \frac{x}{A_{23}} + \frac{y}{A_{31}} + \frac{z}{A_{12}} = 0$$

l'équation de l'axe d'homologie. Les côtés de A'B'C' peuvent être représentés par des équations de la forme

$$mx + u = 0,\quad py + u = 0,\quad qz + u = 0;$$

lesquelles se ramènent aux suivantes :

$$\begin{aligned} A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z &= 0, \\ A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z &= 0, \\ A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z &= 0. \end{aligned}$$

Donc ces droites sont les polaires de A, B, C par rapport à la conique ayant pour équation

$$\sum A_{11}x^2 + 2\sum A_{12}xy = 0.$$

Voici encore une autre démonstration du même théorème. Soient α, β, γ les coordonnées du centre d'homologie, ABC étant le triangle de référence; celles de A', B', C' peuvent être désignées, à un facteur près, par

$$\alpha', \beta, \gamma;\quad \alpha, \beta', \gamma;\quad \alpha, \beta, \gamma'.$$

Exprimons que A′ et B′ sont sur la polaire de C par rapport à une conique ; nous aurons

$$A_{31}\alpha' + A_{32}\beta + A_{33}\gamma = 0,$$

$$A_{31}\alpha + A_{32}\beta' + A_{33}\gamma = 0.$$

On satisfait à ces équations en posant

$$A_{31} = \beta - \beta', \quad A_{32} = \alpha - \alpha', \quad A_{33} = \frac{\alpha'\beta' - \alpha\beta}{\gamma}.$$

Il en résulte que les triangles ABC, A′B′C′ sont polaires réciproques, relativement à la conique représentée par

$$\sum \frac{\beta'\gamma' - \beta\gamma}{\alpha} x^2 + 2\sum(\alpha - \alpha')yz = 0.$$

4. Deux triangles homologiques ABC, A′B′C′, donnent lieu à deux hexagones remarquables.

Le premier de ces hexagones a mêmes sommets que les triangles. Les diagonales AA′, BB′ CC′ se coupent en un même point; donc *il est circonscriptible à une conique* S′ (réciproque du théorème de Brianchon).

L'autre hexagone est formé par les côtés des deux triangles. Ses côtés opposés se rencontrent sur une même droite (l'axe d'homologie); par conséquent, *il est inscriptible à une conique* S″ (réciproque du théorème de Pascal).

Conservons les notations des numéros précédents, et cherchons l'équation de S″. Supposons qu'elle soit

$$C_{11}x^2 + C_{22}y^2 + C_{33}z^2 + 2C_{12}xy + 2C_{23}yz + 2C_{31}zx = 0.$$

Les points où S″ rencontre BC vérifient l'équation

$$C_{22}y^2 + 2C_{23}yz + C_{33}z^2 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Pour exprimer qu'ils coïncident avec ceux où A′B′ et A′C′ coupent BC, il suffit d'identifier l'équation (1) avec

$$(A_{22}y + A_{23}z)(A_{32}y + A_{33}z) = 0.$$

A cet effet, on peut poser

$$C_{22} = A_{22}, \quad C_{33} + A_{33}, \quad 2C_{23} = A_{23} + \frac{A_{22}A_{33}}{A_{23}}.$$

On en conclut facilement que l'équation de S'' est

$$\sum A_{11}x^2 + \sum\left(A_{23} + \frac{A_{22}A_{33}}{A_{23}}\right) yz = 0.$$

Si on la combine avec l'équation de S, on trouve

$$\frac{B_{11}}{A_{23}}\, yz + \frac{B_{22}}{A_{31}}\, zx + \frac{B_{33}}{A_{12}}\, xy = 0,$$

équation d'une conique circonscrite à ABC.

5. En résumé :

1° *Deux triangles homologiques sont polaires réciproques par rapport à une certaine conique* S;

2° *Leurs sommets sont ceux d'un hexagone* H *circonscriptible à une conique* S';

3° *Leurs côtés sont ceux d'un hexagone* H' *inscriptible à une conique* S'';

4° *Les points communs à* S *et* S'', *et les sommets de l'un des triangles, sont sept points d'une même conique* S''';

5° *Les tangentes communes à* S *et* S', *et les côtés de l'un des triangles, sont sept tangentes d'une même conique* S^{IV};

6° *Par rapport à la conique* S, *les hexagones* H, H'; *les coniques* S' *et* S''; *les coniques* S''' *et* S^{IV} *sont des figures polaires réciproques* (*).

Notes du Rédacteur. — I. Les propriétés 2° et 3° ont été

(*) Les propriétés 4° et 5° sont peut-être nouvelles; les autres sont plus ou moins connues. Voir, par exemple, la Note de M. Folie : « *Synthèse des théorèmes de Pascal et de Brianchon.* » (Bulletins de l'Académie royale de Belgique, août 1877.)

énoncées et démontrées, pour la première fois (?), dans mon *Application de l'Algèbre à la Géométrie* (1848). M. Folie, qui les a retrouvées naguère (*), s'est empressé de reconnaître mes droits à la priorité (**).

II. Dans l'ouvrage cité, ou dans les *Nouvelles Annales* (1852), j'ai donné encore le théorème suivant :

Lorsque deux hexagones H, H′ *sont, l'un inscrit, l'autre circonscrit à une même conique* C, *de manière que les sommets du premier soient les points de contact des côtés du second; l'hexagone de Brianchon, déduit de* H, *et l'hexagone de Pascal, déduit de* H′, *sont polaires réciproques, relativement à la conique* C (***).

III. Il restait à démontrer la réciproque de ce théorème connu : *deux triangles, polaires réciproques par rapport à une conique* C, *sont homologiques;* réciproque énoncée, d'une manière un peu vague, par M. Folie (IV). A ma prière, M. Neuberg a bien voulu s'occuper de cette question. Non-seulement il a mis hors de doute la réciproque énoncée par M. Folie ; mais il l'a démontrée simplement. Sa Note, qu'on vient de lire, sera suivie d'un complément remarquable, relatif aux *tétraèdres homologiques* (V).

(*) *Synthèse des théorèmes de Pascal et de Brianchon* (p. 186).

(**) *Restitution de priorité en faveur de M. Catalan* (Bulletins, oct. 1878, p. 379, novembre 1878, p. 946).

(***) *Bulletins*, novembre 1878, p. 946.

(IV) « Brianchon, Steiner, Poncelet, Hesse, etc., ont bien cherché les » propriétés des hexagones dont l'un est le polaire réciproque de l'autre; » mais *ils ne semblent pas s'être doutés que l'hexagone, dont les sommets successifs sont les intersections des côtés alternants d'un hexagone de Pascal, peut être considéré comme le polaire réciproque de ce dernier.* » (Bulletins, août 1877, p. 187.)

(V) Au dernier moment, M. Le Paige me fait observer que les *propriétés* 2° *et* 3° semblent avoir été trouvées aussi par Poncelet (*Applications d'Analyse et de Géométrie*, t. I, p. 137).