Par conséquent,

$$1+x+2x^2+\cdots+\psi(n)x^n\pm\cdots=e^x.e^{\frac{1}{2}\int 2.x^2}\ldots e^{\frac{1}{n}\int n.x^n}\ldots\ldots \qquad (4)$$

Si donc, comme on l'a déjà supposé,

$$a+2b+3c+\cdots=n, \ldots\ldots \qquad (2)$$

on aura

$$\Sigma\frac{(\int 2)^b\times(\int 3)^c\times\cdots}{1.2.3\ldots a\times 2.4.6\ldots 2b\times 3.6\ldots 3c\times\cdots}=\psi(n). \qquad (5)$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Dans cette égalité (5), *le second membre égale le nombre des termes du premier.*

Application. Soit $n=5$. Les solutions de l'équation (2) sont, en ne comptant pas les valeurs nulles :

$$a=5\,;\ a=3,\ b=1\,;\ a=1,\ b=2;\ a=2,\ c=1\,;\ b=1,\ c=1\,;$$
$$a=1,\ d=1\,;\ e=1.$$

On doit trouver

$$\frac{1}{120}+\frac{3}{6.2}+\frac{9}{2.4}+\frac{4}{2.3}+\frac{3.4}{2.3}+\frac{7}{4}+\frac{6}{5}=7,$$

ou

$$\frac{1}{120}+\frac{1}{4}+\frac{9}{8}+\frac{2}{3}+2+\frac{7}{4}+\frac{6}{5}=7;$$

ce qui a lieu.

Question 467.

Intégrer l'équation différentielle

$$(x^2-a^2)^2y''+2x(x^2-a^2)y'-\left[n(n+1)(x^2-a^2)+n^2a^2\right]y=0,$$

et démontrer que l'intégrale complète est une fonction uniforme, lorsque x *reste compris dans l'intérieur d'un cercle dont le rayon est* a. (ESCARY.)

Grâce à l'*Erratum* publié dans le numéro de *juin* de la *Nouvelle Correspondance mathématique,* cette question, qui a déjà été savamment traitée par M. RADICKE, peut être résolue, en partie, du moins, par les procédés les plus élémentaires du calcul intégral (*).

Soit

$$y = e^{\int X dx};$$

et, par conséquent :

$$y' = e^{\int X dx} . X,$$

$$y'' = e^{\int X dx}\left(\frac{dX}{dx} + X^2\right).$$

L'équation proposée devient

$$(x^2 - a^2)^2 \frac{dX}{dx} + (x^2 - a^2)^2 X^2 + 2x(x^2 - a^2) X - \left[n(n+1)(x^2 - a^2) + n^2 a^2\right] = 0,$$

ou

$$(x^2 - a^2)\left[(x^2 - a^2)\frac{dX}{dx} + 2xX\right] + (x^2 - a^2)^2 X^2 - \left[n(n+1)(x^2 - a^2) + n^2 a^2\right] = 0.$$

Il convient de poser :

$$(x^2 - a^2) X = Y.$$

Par cette nouvelle subtitution, l'on obtient

$$(x^2 - a^2)\frac{dY}{dx} + Y^2 = n(n+1)x^2 - na^2.$$

On voit immédiatement que cette équation est vérifiée par

$$Y = nx.$$

(*) Cet énoncé paraît *voué* aux *Errata :* dans sa Note, M. Jamet a omis le facteur y ! (E. C.)

L'intégrale générale est donc

$$Y = nx + uv,$$

u et v étant deux fonctions de x, que nous déterminerons ultérieurement. La proposée devient

$$(x^2 - a^2)\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right) + 2nxuv + u^2v^2 = 0.$$

Nous sommes conduits, dès lors, à déterminer u et v par les équations :

$$(x^2 - a^2)\frac{dv}{dx} + 2nxv = 0,$$

$$(x^2 - a^2)\frac{du}{dx} + vu^2 = 0.$$

On satisfait à la première en prenant

$$v = \frac{1}{(x^2 - a^2)^n}.$$

Portant cette valeur de v dans la seconde équation, puis intégrant, nous trouvons :

$$\frac{1}{u} = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{n+1}}$$

x_0 étant arbitraire. Par suite :

$$X = \frac{nx}{x^2 - a^2} + \frac{1}{(x^2 - a^2)^{n+1}\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{n+1}}},$$

$$\int X dx = \mathrm{l}(x^2 - a^2)^{\frac{n}{2}} + \mathrm{l}\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{n+1}} + \mathrm{l}A,$$

$$y = A(x^2 - a^2)^{\frac{n}{2}}\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{n+1}};$$

A désignant une constante arbitraire. Telle est l'intégrale générale de l'équation proposée. Quant à l'uniformité de la fonction, quand x reste compris à l'intérieur d'un cercle dont le rayon est a, il n'y a rien à ajouter aux savantes remarques de notre honorable Collègue de Bromberg. (V. Jamet.)

Note du Rédacteur. Si l'on écrit ainsi l'équation proposée :

$$(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}y''+2x(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}y'-\left[n(n+1)(x^2-a^2)+n^2a^2\right](x^2-a^2)^{-\frac{3}{2}}y=0, \quad (1)$$

on voit que les deux premiers termes forment les deux premières parties de

$$\left[(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}y\right]''.$$

Soit donc

$$(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}y=z;$$

et, par conséquent :

$$(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}y'+x(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}y=z',$$

$$(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}y''+2x(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}y'-a^2(x^2-a^2)^{-\frac{3}{2}}y=z'' \quad . \quad (2)$$

Soustrayant, l'on a

$$(n+1)\left[n(x^2-a^2)+(n-1)a^2\right](x^2-a^2)^{-\frac{3}{2}}y=z'';$$

ou, en multipliant et divisant par $(x^2-a^2)^2$,

$$\frac{z''}{z}=(n+1)\frac{nx^2-a^2}{(x^2-a^2)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Si l'on essaie $z=(x^2-a^2)^p$, on trouve $p=\frac{n+1}{2}$. Ainsi, une intégrale de l'équation (3) est

$$z_1=(x^2-a^2)^{\frac{n+1}{2}}.$$

Cela posé, la proportion

$$\frac{z''}{z}=\frac{z_1''}{z_1}$$

étant mise sous la forme

$$z_1 z'' - z z_1'' = 0,$$

donne, par l'intégration,

$$z_1 z' - z z_1' = \mathrm{A},$$

ou

$$\frac{z_1 z' - z z_1'}{z_1^2} = \frac{\mathrm{A}}{z_1^2},$$

puis l'*intégrale générale :*

$$z = z_1 \left(\mathrm{A} \int \frac{dz}{z_1^2} + \mathrm{B} \right);$$

ce qui ne diffère pas du résultat obtenu par M. Jamet.

Remarque (*). X désignant une fonction quelconque de x, la quantité

$$y_1 = \mathrm{X} \int \frac{dx}{\mathrm{X}^2},$$

comme on le vérifie aisément, est une intégrale de l'équation

$$\frac{y''}{y} = \frac{\mathrm{X}''}{\mathrm{X}} \quad \text{. . . . . (4)}$$

Et comme $y_2 = \mathrm{X}$ en est une autre, l'intégrale générale a pour expression

$$y = \left(\mathrm{A} \int \frac{dx}{\mathrm{X}^2} + \mathrm{B} \right) \mathrm{X}\ (^{**}).$$

(*) Suggérée par la Note de M. Jamet.

(**) *Sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques.* Première Note. Rome, 1867.