Dans le second cas, *y est un carré impair;* et, dans le premier, *y est le double d'un carré pair.*

IV. A propos des fractions continues, voici quelques propriétés presque évidentes :

1° *Les termes de deux réduites consécutives ne peuvent être tous impairs;*

2° *Si une réduite a ses termes impairs,* chacune *des deux réduites voisines a un terme pair* (Corollaire de 1°);

3° *Lorsque deux réduites consécutives ont, chacune, un terme pair, la même propriété subsiste pour toutes les réduites suivantes.* (E. C.).

Question 276.

Trouver, sous forme finie, les valeurs des expressions :

$$A = \int_0^a \frac{l(1+x)}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{l(1+ax)}{1+x^2}\,dx,$$

$$B = \int_0^a \frac{lx}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{l\big[(1+ax)(a+x)\big]}{1+x^2}\,dx.$$

(É. Ghysens.) (*)

I. Des règles relatives à la différenciation sous le signe $\int$, on déduit

$$\frac{dA}{da} = \frac{l(1+a)}{1+a^2} + \int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+x^2)(1+ax)}.$$

La fraction

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+ax)} = -\frac{a}{(1+a^2)(1+ax)} + \frac{1}{1+a^2}\,\frac{x+a}{1+x^2};$$

(*) Émile Ghysens, Répétiteur d'Analyse à l'École des Mines (Liége), vient de mourir à l'âge de trente ans. Ce jeune homme, déjà connu par quelques travaux intéressants, donnait de grandes espérances.

donc

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+x^2)(1+ax)} = -\frac{l(1+a)}{1+a^2} + \frac{1}{1+a^2}\left[\frac{1}{2}l2 + a\frac{\pi}{4}\right],$$

$$\frac{dA}{da} = \frac{1}{1+a^2}\left[\frac{1}{2}l2 + a\frac{\pi}{4}\right],$$

$$A = \frac{1}{2}l2 \,.\, \text{arc tg}\, a + \frac{\pi}{8}l(1+a^2)\ (^*). \quad . \quad . \quad (1)$$

II. De même,

$$\frac{dB}{da} = \frac{la}{1+a^2} + \int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+x^2)(1+ax)} + \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(a+x)};$$

ou, par ce qui précède,

$$\frac{dB}{da} = \frac{1}{1+a^2}\left[l\frac{a}{1+a} + \frac{1}{2}l2 + a\frac{\pi}{4}\right] + \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(a+x)}.$$

En outre,

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(a+x)} = \frac{1}{1+a^2}\left[\int_0^1 \frac{dx}{a+x} - \int_0^1 \frac{x-a}{1+x^2}dx\right]$$

$$= \frac{1}{1+a^2}\left[l\frac{1+a}{a} - \frac{1}{2}l2 + a\frac{\pi}{4}\right].$$

Ainsi

$$\frac{dB}{da} = \frac{a}{1+a^2}\frac{\pi}{2};$$

puis

$$B = \frac{\pi}{4}l(1+a^2)\ (^{**}). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

(*) On n'ajoute pas de constante, parce que A doit s'annuler avec a.

(**) Lorsque $a=0$,

$$B = -\int_0^1 \frac{lx}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{lx}{1+x^2}dx = 0;$$

car, comme on va le voir, cette intégrale a une valeur finie.

III. Si l'on suppose $a = 1$, chacune des formules (1), (2) donne

$$\int^{1} \frac{\mathrm{l}(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\,\mathrm{l}2\,;$$

valeur connue.

IV. Les intégrales considérées par É. Ghysens sont des généralisations de celles auxquelles donne lieu la sommation de la série

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \cdots$$

En représentant par G la somme de cette série, on trouve, en effet :

$$G = -\int_0^1 \frac{\mathrm{l}x}{1+x^2}\,dx.$$

Note sur la constante G.

I. Il est bien remarquable que les sommes des séries

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \cdots,$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} - \cdots,$$

dépendent, uniquement, de la transcendante π, combinée avec des nombres commensurables, et que la série

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots,$$

semble *très-difficile* à sommer.

II. Dans le *Mémoire sur la transformation des séries* (*), j'ai fait voir qu'en représentant par G la somme de cette série (**), on a

$$G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\,dx = -\int_0^1 \frac{\mathrm{l}.\,x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\,\mathrm{l}.\,\frac{1+x}{1-x}$$

$$= 2\int_0^1 \frac{\frac{1}{4}\pi - \operatorname{arc\,tg} x}{1-x^2}\,dx = 2\int_0^1 \frac{1-x^3}{x(1+x)(1+x^2)}\operatorname{arc\,tg} x\,dx. \quad (1)$$

III. A ces formules, peu commodes pour le calcul numérique, on peut joindre celles-ci :

$$G = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi^2}{8}\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sin\frac{\pi}{2}x} = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,\mathrm{l}.\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2 dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,x^2\,dx = \cdots, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

qui ne le sont pas davantage.

IV. En transformant la série primitive, j'ai trouvé, par un long calcul,

$$G = 0{,}915\ 965\ 594\ 177\ 21.$$

Question 311.

Trouver la courbe dans laquelle la partie de la perpendiculaire

---

(*) *Académie de Belgique* (*Mémoires des savants étrangers*, t. XXXIII).

(**) La lettre G s'est présentée dans une suite alphabétique. Du reste, quelques-unes des intégrales définies considérées dans le travail cité, ont été trouvées par Legendre.