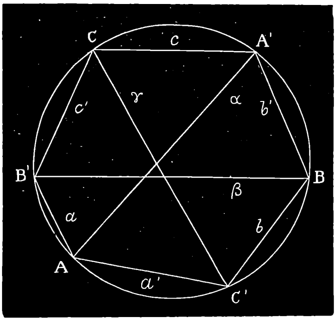
Question 443.

Soient a, a′, b, b′, c, c′ *les côtés consécutifs d'un hexagone inscrit; soient* α, β, γ *les diagonales qui joignent les sommets* *opposés. On a, entre ces neuf éléments, les relations*

$$(ab + a'\beta)(bc + b'\gamma)(ca + c'\alpha) = (a'b' + b\alpha)(b'c' + c\beta)(c'a' + a\gamma)$$
$$= (\alpha\beta - ab')(\beta\gamma - bc')(\gamma\alpha - ca').$$

(E. C.)

I. Dans les quadrilatères inscrits CA′BC′, A′BC′A :



$$b'\gamma + bc = \mathrm{A'C'.BC},$$

$$b\alpha + a'b' = \mathrm{A'C'.AB};$$

et, par conséquent,

$$\frac{b'\gamma + bc}{b\alpha + a'b'} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}.$$

Une permutation tournante donne ensuite :

$$\frac{c'\alpha + ca}{c\beta + b'c'} = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{BC}},$$

$$\frac{a'\beta + ab}{a\gamma + c'a'} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CA}}.$$

Le produit des seconds membres égale l'unité; donc

$$(bc + b'\gamma)(ca + c'\alpha)(ab + a'\beta) = (a'b' + b\alpha)(b'c' + c\beta)(c'a' + a\gamma). \quad (1)$$

Dans les quadrilatères inscrits CA′BA, ABCB′ :

$$\mathrm{C.AB} + b'.\mathrm{CA} = \alpha.\mathrm{BC},$$

$$\mathrm{C'AB} + a.\mathrm{BC} = \beta.\mathrm{CA};$$

donc, par l'élimination de CA :

$$(c\beta + b'c')\,\mathrm{AB} = (\alpha\beta - ab')\,\mathrm{BC};$$

puis, au moyen d'une permutation tournante :

$$(a\gamma + c'a')\,\mathrm{BC} = (\beta\gamma - bc')\,\mathrm{CA},$$

$$(b\alpha + a'b')\,\mathrm{CA} = (\gamma\alpha - ca')\,\mathrm{AB}.$$

Conséquemment,

$$(c\beta + b'c')(a\gamma + c'a')(b\alpha + a'b') = (\alpha\beta - ab')(\beta\gamma - bc')(\gamma\alpha - ca'). \quad (2)$$

(E. C.)