CORRESPONDANCE.

Extraits d'une lettre de M. H. Brocard.— « Vous avez répondu touchant les énoncés 8, 9, 28 et 146 (*). Je m'occuperai donc spécialement des *Questions* que j'ai proposées.

Question 59. Les points B, et les droites AB, BB′ ... n'offrent pas de continuité, du moins à première vue. Cependant les points B se trouvent sur une courbe parfaitement déterminée; et les droites AB, BB′, ... sont toutes, tangentes à une seule et même courbe. De semblables conditions motivent donc les désignations *de lieu des points* B, *et d'enveloppe des droites* AB, BB′,...

Voir, à ce sujet, dans les *Nouvelles Annales* (1869, pp. 1-16, et 1870, pp. 38-40) un travail de M. W. A. Whitworth, ayant trait à l'étude des principales propriétés de la *spirale équiangle*, prouvées géométriquement.

Au reste, ne serait-il pas plus juste d'appeler cette courbe, spirale de JACQUES BERNOULLI? Elle jouit de propriétés bien autrement remarquables, bien autrement nombreuses, que celles de la spirale qui porte, à tort, le nom d'ARCHIMÈDE, puisque le grand Géomètre syracusain n'en est pas l'inventeur.

Question 101. Les éclaicissements nécessaires nous sont donnés par divers ouvrages, entre autres par le *Traité de la Chaleur*, de FOURIER (1822); le *Calcul intégral*, de DUHAMEL, etc. (**).

(*) Voir, dans le numéro de *juin*, les *Remarques sur certaines Questions proposées*.

(**) Depuis Euler, Lagrange et Fourier, on sait représenter, soit par des *séries trigonométriques*, soit par des *intégrales définies*, les fonctions *discon-*

Question 309. L'énoncé est parfaitement compréhensible. Il est évident que la courbe est rapportée à un système d'axes rectangulaires. Par conséquent, le segment de l'axe des y part de l'origine. »

« Votre Correspondant signale, au sujet de l'énoncé 270 (Ch. Graves), des erreurs typographiques... Au lieu de

$$n_{39}, \quad n_{39+1}, \quad n_{39+2},$$

il faut

$$n_{3q}, \quad n_{3q+1}, \quad n_{3q+2} \text{ (*)}.$$

Vous pourrez aisément vérifier le théorème, qui est assez curieux.

Soit

$$(1+x)^7 = 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^3 + 7x^6 + x^7.$$

Alors :

$$n_0 = 1, \quad n_3 = 35, \quad n_6 = 7;$$
$$n_1 = 7, \quad n_4 = 35, \quad n_7 = 1;$$
$$n_2 = 21, \quad n_5 = 21;$$

puis

$$\sum(n_{3q}) = 45, \quad \sum(n_{3q+1}) = 43, \quad \sum(n_{3q+2}) = 42. \text{ »}$$

---

tinues les plus compliquées. A ce propos, il n'est peut-être pas inutile de rappeler que, vers 1840, un Répétiteur de l'École militaire de Bruxelles *mit*, en *intégrale définie*, le *God Save the King!* (E. C.)

(*) L'énoncé doit donc être ainsi rectifié :

Si l'on pose

$$(1+x)^n = \Sigma n_p x^n,$$

n *étant entier et positif, et*

$$S_0 = \Sigma n_{3q}, \quad S_1 = \Sigma n_{3q+1}, \quad S_2 = \Sigma n_{3q+2};$$

parmi les trois nombres S_0, S_1, S_2, *il y en aura toujours deux qui seront égaux entre eux et qui différeront, du troisième, d'une unité.* (E. C.)

NOTE DU RÉDACTEUR. En général,

$$pS_k = (1+\theta)^n\theta^{-k} + (1+\theta^2)^n\theta^{-2k} + \cdots + (1+\theta^p)^n\theta^{-pk}; \quad . \quad (1)$$

θ représentant une racine, imaginaire, de l'équation

$$\theta^p - 1 = 0\ (^*) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dans le cas actuel, $p=3$, et $k=1$, 2 ou 3. La formule (1) donne donc :

$$3S_0 = (1+\theta)^n + (1+\theta^2)^n + 2^n,$$

$$3S_1 = (1+\theta)^n\theta^{-1} + (1+\theta^2)^n\theta^{-2} + 2^n,$$

$$3S_2 = (1+\theta)^n\theta^{-2} + (1+\theta^2)^n\theta^{-1} + 2^n.$$

L'équation (2) se réduit à

$$\theta^2 + \theta + 1 = 0;$$

de sorte que

$$1+\theta = -\theta^2, \quad 1+\theta^2 = -\theta;$$

et, en conséquence :

$$3S_0 = (-1)^n\left[\theta^{2n} + \theta^n\right] + 2^n,$$

$$3S_1 = (-1)^n\left[\theta^{2n+2} + \theta^{n+1}\right] + 2^n,$$

$$3S_2 = (-1)^n\left[\theta^{2n+1} + \theta^{n+2}\right] + 2^n.$$

Si maintenant on suppose, successivement :

$$n = \mathfrak{M}3, \quad n = \mathfrak{M}3 + 1, \quad n = \mathfrak{M}3 + 2,$$

on vérifie, tout de suite, les propriétés énoncées par M. Graves.

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XX (1861).