SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES.

Questions 448, 465.

THÉORÈME. *Si le nombre* n *est décomposé en parties appartenant aux progressions*

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & 3, \ldots & a, \ldots, \\ 2, & 4, & 6, \ldots & 2b, \ldots, \\ 3, & 6, & 9, \ldots & 3c, \ldots, \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \vdots \end{array}$$

1° *La somme des fractions*

$$\frac{1}{1.2.3\ldots a \times 2.4.6\ldots 2b \times 3.6.9\ldots 3c \times \ldots},$$

égale l'unité.

2° *La somme des fractions*

$$\frac{(\int 2)^b \times (\int 3)^c \times \ldots}{1.2.3\ldots a \times 2.4.6\ldots 2b \times 3.6.9\ldots 3c \times \ldots};$$

égale le nombre des décompositions. (E. C.)

1° De

$$-1(1-x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots,$$

ou

$$1(x + x^2 + x^3 + \cdots) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots,$$

on conclut

$$x + x^2 + x^3 + \cdots = e^{\frac{x}{1}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{\frac{x^3}{3}} \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Développant chaque facteur, on a, comme terme général du produit :

$$\frac{x^a}{1.2\ldots a} \times \frac{x^{2b}}{1.2\ldots b.2^b} \times \frac{x^{3c}}{1.2\ldots c.3^c} \times \cdots,$$

ou

$$\frac{x^{a+2b+3c+\ldots}}{1.2\ldots a \times 2.4\ldots 2b \times 3.6\ldots 3c \times \ldots}.$$

Si donc

$$a + 2b + 3c + \cdots = n, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

on aura

$$\Sigma \frac{1}{1.2\ldots a \times 2.4\ldots 2b \times 3.6\ldots 3c \times \ldots} = 1; \quad \ldots \quad (3)$$

le signe Σ s'étendant à toutes les *solutions entières, non négatives*, de l'équation (2) (*).

D'ailleurs, ces *décompositions* de n sont celles dont il est question dans l'énoncé. Le théorème est donc démontré.

2° On trouve, facilement,

$$-\mathrm{l}[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots] = x + \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \cdots + \frac{1}{n}\int n . x^n + \cdots$$

Le premier membre égale

$$\mathrm{l}\,\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots} = \mathrm{l}\left[1 + x + \cdots + \psi(n)\,x^n + \cdots\right] (^{**}).$$

(*) Le nombre de ces solutions, le même que celui des *décompositions de* n, *en parties égales ou inégales*, est le coefficient de x^n, dans le développement de

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots}.$$

(*Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 11.) Dans ce travail, le coefficient dont il s'agit est désigné par $\psi(n)$.

(**) Voir la note précédente.

Par conséquent,

$$1 + x + 2x^2 + \cdots + \psi(n) x^n \pm \cdots = e^x . e^{\frac{1}{2}\int 2.x^2} \ldots e^{\frac{1}{n}\int n.x^n} \ldots\ldots \qquad (4)$$

Si donc, comme on l'a déjà supposé,

$$a + 2b + 3c + \cdots = n, \ldots\ldots \qquad (2)$$

on aura

$$\sum \frac{(\int 2)^b \times (\int 3)^c \times \cdots}{1.2.3\ldots a \times 2.4.6\ldots 2b \times 3.6\ldots 3c \times \cdots} = \psi(n) . \qquad (5)$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Dans cette égalité (5), *le second membre égale le nombre des termes du premier.*

Application. Soit $n = 5$. Les solutions de l'équation (2) sont, en ne comptant pas les valeurs nulles :

$$a = 5 ; a = 3, b = 1 ; a = 1, b = 2 ; a = 2, c = 1 ; b = 1, c = 1 ;$$
$$a = 1, d = 1 ; e = 1.$$

On doit trouver

$$\frac{1}{120} + \frac{3}{6.2} + \frac{9}{2.4} + \frac{4}{2.3} + \frac{3.4}{2.3} + \frac{7}{4} + \frac{6}{5} = 7,$$

ou

$$\frac{1}{120} + \frac{1}{4} + \frac{9}{8} + \frac{2}{3} + 2 + \frac{7}{4} + \frac{6}{5} = 7;$$

ce qui a lieu.

Question 467.

Intégrer l'équation différentielle

$$(x^2 - a^2)^2 y'' + 2x(x^2 - a^2) y' - \left[n(n+1)(x^2 - a^2) + n^2 a^2\right] y = 0,$$