Question 447.

La somme des diviseurs des nombres 1, 2, 3,... n, *égale la somme des plus grands multiples de ces nombres, non supérieurs à* n (*).

I. Parmi les nombres 1, 2, 3,..., n, prenons ceux qui sont divisibles par un nombre k; savoir :

$$k.1,\quad k.2,\quad k.3,\ \ldots,\ k\left(\frac{n}{k}\right).$$

Dans la *somme des diviseurs*, le diviseur k entre donc un nombre de fois marqué par $\left(\frac{n}{k}\right)$; et la partie de cette somme, *formée de ce diviseur*, égale $k\left(\frac{n}{k}\right)$, ou *le plus grand multiple de* k, *non supérieur à* n.

Par conséquent,

$$\int 1+\int 2+\int 3+\cdots+\int n=1\left(\frac{n}{1}\right)+2\left(\frac{n}{2}\right)+3\left(\frac{n}{3}\right)+\cdots+n\left(\frac{n}{n}\right). \quad (1)$$

II. Le second membre de l'égalité (1) est formé de n termes. Quant au premier membre, il en contient, d'après la démonstration précédente, un nombre marqué par

$$X_n=\left(\frac{n}{1}\right)+\left(\frac{n}{2}\right)+\left(\frac{n}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right). \quad \ldots \quad (2)$$

Telle est, par conséquent, l'expression du *nombre des diviseurs des nombres* 1, 2, 3, ..., n.

(*) Voir *N. C. M.*, t. V, p. 22.

Soit, par exemple, $n = 12$. La formule donne

$$X_{12} = 12 + 6 + 4 + 3 + \left(\frac{12}{5}\right) + 2 + \left(\frac{12}{7}\right) + \left(\frac{12}{8}\right)$$
$$+ \left(\frac{12}{9}\right) + \left(\frac{12}{10}\right) + \left(\frac{12}{11}\right) + \left(\frac{12}{12}\right),$$
$$= 12 + 6 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1,$$

ou

$$X_{12} = 35.$$

En effet, le premier membre de l'égalité (1) est

$$1 + 1 + 2 + 1 + 3 + 1 + 2 + 4 + 1 + 5 + 1 + 2 + 3 + 6 + 1$$
$$+ 7 + 1 + 2 + 4 + 8 + 1 + 3 + 9 + 1 + 2 + 5 + 10 + 1$$
$$+ 11 + 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12.$$

III. Si, de X_n, on retranche X_{n-1}, le reste égale *le nombre des diviseurs de* n. Soit $N(n)$ ce reste : on a, par la formule (2),

$$N(n) = 1 + \left[\left(\frac{n}{n-1}\right) - \left(\frac{n-1}{n-1}\right)\right] + \left[\left(\frac{n}{n-2}\right) - \left(\frac{n-1}{n-2}\right)\right] + \cdots$$
$$+ \left[\left(\frac{n}{2}\right) - \left(\frac{n-1}{2}\right)\right] + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

On vérifie aisément cette relation, en observant que *le terme général du second membre,*

$$\left(\frac{n}{k}\right) - \left(\frac{n-1}{k}\right),$$

est égal à 1 *ou à* 0, *selon que* k *divise ou ne divise pas* n (*).

IV. Lorsque n est un grand nombre, le calcul du second membre de l'égalité (1) peut être laborieux; mais il est aisé de l'abréger.

(*) Il y a exception, bien entendu, pour $k = 1$:

$$\left(\frac{n}{1}\right) - \left(\frac{n-1}{1}\right) = 1.$$

En effet, soient $n, l, k, h, g, f, \ldots$ les diviseurs de n, dans l'*ordre décroissant*. Il est visible que

$$\left(\frac{n}{n}\right) = \left(\frac{n}{n-1}\right) = \cdots = \left(\frac{n}{l+1}\right) = 1,$$

$$\left(\frac{n}{l}\right) = \left(\frac{n}{l-1}\right) = \cdots = \left(\frac{n}{k+1}\right),$$

$$\left(\frac{n}{k}\right) = \left(\frac{n}{k-1}\right) = \cdots = \left(\frac{n}{n+1}\right),$$

. . . .

Par conséquent, la somme cherchée, S_n, égale

$$[n + (n-1) + \cdots + (l+1)]\left(\frac{n}{n}\right) + [l + (l-1) + \cdots + (k+1)]\left(\frac{n}{l}\right)$$
$$+ [k + (k-1) + \cdots + (h+1)]\left(\frac{n}{k}\right) + \cdots + \left(\frac{n}{1}\right);$$

ou, plus simplement :

$$S_n = \frac{1}{2}(n + l + 1)(n - l)\left(\frac{n}{n}\right) + \frac{1}{2}(l + k + 1)(l - k)\left(\frac{n}{l}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}(k + h + 1)(k - h)\left(\frac{n}{k}\right) + \cdots + \left(\frac{n}{1}\right) \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (4)$$

Soit $n = 12$, auquel cas les diviseurs sont

$$12, \quad 6, \quad 4, \quad 3, \quad 2, \quad 1.$$

La formule (4) donne

$$S_{12} = \frac{19}{2}.6.1 + \frac{11}{2}.2.2 + \frac{8}{2}.1.3 + \frac{6}{2}1.4 + \frac{4}{2}.1.6 + 2.6 + 12 = 139.$$

(E. C.)