On a, par exemple, pour $n = 3$,

$$2^3 - 1 = 7, \quad 2^2 = 4,$$

et

$$2^2 - 2 - 1 = 1,$$
$$2^2 - 2 + 1 = 3,$$
$$2^2 + 2 - 1 = 5,$$
$$2^2 + 2 + 1 = 7.$$

2° Tout nombre impair peut être représenté, d'une infinité de manières, au moyen de l'expression ci-dessus, où l'on donne successivement à n toutes les valeurs entières, à partir de la plus petite valeur qui convient au nombre considéré.

Par exemple,

$$5 = 2^2 + 2 - 1$$
$$5 = 2^3 - 2^2 + 2 - 1,$$
$$5 = 2^4 - 2^3 - 2^2 + 2 - 1,$$
$$5 = 2^5 - 2^4 - 2^3 - 2^2 + 2 - 1,$$

etc.

SUR UNE SUITE DE NOMBRES IMPAIRS.

Ces nombres, considérés d'abord par Euler, sont définis par l'équation

$$P_{2q-1} - \frac{2q(2q-1)}{2.3} P_{2q-3} + \frac{2q(2q-1)(2q-2)(2q-3)}{2.3.4.5} P_{2q-5} - \cdots \pm \frac{2q}{2} P_1 = \pm 1, \quad (1)$$

jointe à la *condition initiale* : $P_1 = 1$ (*).

(*) *Mélanges mathématiques*, p. 129; *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. II, p. 335; etc.

I. Pour démontrer qu'ils sont *entiers*, M. Mangon, lieutenant d'artillerie, emploie la méthode suivante, remarquablement simple :

Si P_1, P_3, P_5, ... P_{2q-3} *sont entiers*, l'équation (1) devient, après multiplication par $2q+1$:

$$(2q+1)P_{2q-1} = \textit{entier}.$$

D'un autre côté, on sait que

$$4^{q-1}P_{2q-1} = \textit{entier}\ (^*).$$

Soit $\frac{A}{B}$ la fraction irréductible, équivalente à P_{2q-1} : B doit diviser $2q+1$ et 4^{q-1} ; ces nombres sont premiers entre eux ; donc $B=1$.

II. Si P_1, P_3, ... P_{2q-3} sont *impairs*, et que l'on néglige des multiples de 2, l'équation (1) peut être écrite ainsi :

$$P_{2q-1} = C_{2q+1,1} + C_{2q+1,3} + \cdots + C_{2q+1,2q-1} = 2^{2q} - 1 = \textit{nombre impair}.$$

Remarque. Si l'on ne prenait pas convenablement le terme initial, P_1, les valeurs de P_3, P_5, ... pourraient, très-bien, être fractionnaires. Soit, par exemple, $P_1 = 2$. On trouve

$$P_3 = 3, \quad P_5 = 10, \quad P_7 = 58\,\frac{1}{3}.$$

(E. C.)

(*) *Mélanges*, p. 129.