que celui-ci avait obtenus, ce semble, *par induction.* » (GAUSS, *Œuvres*, t. II, 2e édition, pp. 159-160.)

Antérieurement, dans le même recueil (12 mai 1808, *Œuvres*, t. II, pp. 151-152), GAUSS avait déjà énoncé la même pensée : « Les plus belles propriétés des nombres, dit-il, et, en particulier la loi de réciprocité des résidus quadratiques, sont faciles à trouver par induction, mais très-difficiles à démontrer. FERMAT connaissait le caractère quadratique des nombres — 1, ± 2, ± 3, et il affirme même avoir la démonstration des théorèmes qui y sont relatifs. Comme il n'a rien publié sur la question, nous ne pouvons savoir s'il ne s'est pas trompé; mais cela est très-possible, car on peut citer de grands Géomètres qui se sont fait illusion sur la valeur de leurs démonstrations en Arithmétique supérieure, par exemple, EULER, LEGENDRE et FERMAT *lui-même.* »

Ici, comme on le voit, l'accusation est plus précise. En résumé, GAUSS dit : I. Il est probable que Fermat a trouvé ses théorèmes par induction. II. Il est possible qu'il n'en ait pas possédé de vraies démonstrations; car : 1° elles sont très-difficiles à trouver; 2° il s'est trompé lui-même sur la valeur de certaines de ses démonstrations.

Nous allons essayer d'établir précisément le contraire de la seconde assertion de Gauss ; ce qui affaiblira, du même coup, la première, quoique, à la rigueur, on puisse admettre celle-ci.

(*La fin prochainement.*)

QUELQUES IDENTITÉS.

I. $$[x^3 - y^3 + 3xy(2x + y)]^3 + [y^3 - x^3 + 3xy(2y + x)]^3 = 27xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)^3.$$

(ÉDOUARD LUCAS.)

Remarque. D'après le Théorème de Fermat, le second membre ne saurait être un cube; donc :

L'équation

$$xy(x+y)=z^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

est impossible.

La réciproque est vraie. Par conséquent, si l'on pouvait démontrer, simplement, ce dernier théorème, celui de Fermat s'ensuivrait. Mais l'équation (1) conduit, tout de suite, à celle-ci,

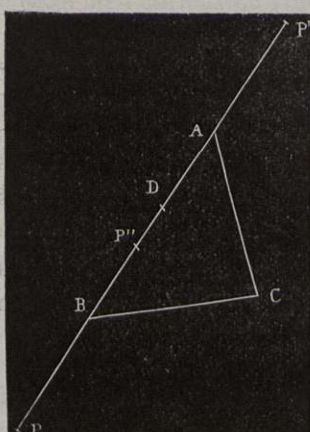
$$x'^3 + y'^3 = z'^3; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

en sorte que l'on tourne dans un cercle.

II. Si $2p = a + b + c$, on a, *identiquement,*

$$p^2 + (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

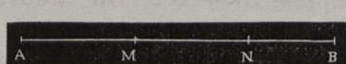
(E. C.)



A-t-on imprimé, quelque part, cette relation évidente? Quoi qu'il en soit, elle donne lieu aux propositions suivantes :

1° *Soient, sur le côté* AB *d'un triangle* ABC, D, P, P', P'' *les points de contact du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits : la somme des carrés des distances du sommet* A, *à ces quatre points, est égale à la somme des carrés des côtés;*

2° *Si l'on prend, sur une droite* AB, *deux points quelconques* M, N (*), *on a, entre les six distances* AM, AN, AB, MN, MB, NB, *la relation*



$$\overline{AM}^2 + \overline{MN}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{BM}^2 + (AM + BN)^2.$$

(*) Moyennant certaines restrictions, ces points peuvent être situés sur les prolongements de la droite.

3° *La fonction* $(a^2 + b^2 + c^2 + bc + ca + ab)^2$, *égale à*

$$[(a+c)(a+b)]^2 + [(b+c)(a+b)]^2 + (c^2 + ac + bc - ab)^2,$$

et égale, aussi, à

$$[a(a+b+c)]^2 + [b(a+b+c)]^2 + [c(a+b+c)]^2 + [bc+ca+ab]^2 (^*),$$

est égale, encore, à

$$\tfrac{1}{4}[a^2-b^2+c^2+(a+b)c-ab]^2 + \tfrac{1}{4}[b^2-a^2+c^2+(a+b)c-ab]^2$$
$$+\tfrac{1}{4}[a^2+b^2-c^2+(a+b)c+3ab]^2 + [a^2+b^2+c^2+3(a+b)c+ab]^2.$$

4° *La fonction* $[a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2]^2$ *égale*

$$[a^2-b^2+c^2+bc+ca-ab]^2 + [-a^2+b^2+c^2+bc+ca-ab]^2$$
$$+[a^2+b^2-c^2+3bc+3ca+ab]^2 + [a^2+b^2+c^2+bc+ca+3ab]^2.$$

5° *La fonction* $[(b+c)^2 + (c+a)^2 + (a+b)^2]^2$ *égale*

$$(a^2-b^2+c^2+bc+ca-ab)^2 + (-a^2+b^2+c^2+bc+ca-ab)^2$$
$$+(a^2+b^2-c^2+bc+ca+3ab)^2 + (a^2+b^2+c^2+3bc+3ca+ab)^2$$
$$=(b^2-c^2+a^2+ca+ab-bc)^2 + (-b^2+c^2+a^2+ca+ab-bc)^2$$
$$+(b^2+c^2-a^2+ca+ab+3bc)^2 + (b^2+c^2+a^2+3ca+3ab+bc)^2$$
$$=(c^2-a^2+b^2+ab+bc-ca)^2 + (-c^2+a^2+b^2+ab+bc-ca)^2$$
$$+(c^2+a^2-b^2+ab+bc+3ca)^2 + (c^2+a^2+b^2+3ab+3bc+ca)^2;$$

etc.

6° Généralement, *si un nombre pair est la somme de trois carrés, il est décomposable en quatre carrés.* Il y a exception quand une des racines est égale à la somme des deux autres.

7° Soit, par exemple, $N = 3^2 + 5^2 + 6^2$. On trouve $N = 7^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2$; puis, par les identités précédentes :

$$N^2 = (3^2 + 5^2 + 6^2)^2 = (7^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2)^2$$
$$= 60^2 + 36^2 + 2^2 = 49^2 + 11^2 + 13^2 + 47^2; \text{ etc.}$$

(*) *N. C. M.*, t. I, pp. 132, 133 (1re édition).

$$\text{III.}\quad \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1;$$

donc *la somme des nombres* $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{n}$, *plus la somme de leurs produits deux à deux, plus la somme de leurs produits trois à trois, ..., plus leur produit, égale* n.

(Ernest Cesaro.)

$$\text{IV.}\quad \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=C_{n,1}-\frac{1}{2}C_{n,2}+\frac{1}{3}C_{n,3}-\cdots\pm\frac{1}{n}C_{n,n}.$$

(E. Cesaro.)

Voilà encore deux relations curieuses, presque évidentes, et peut-être non remarquées jusqu'à présent. A propos de la deuxième (II), M. Brocard m'écrivait, récemment : « Il est à pré-
» sumer que l'on finira, un jour, par réunir assez d'identités de
» ce genre, pour établir, d'une manière élémentaire, que tout
» nombre entier peut s'écrire sous forme d'une somme de quatre
» carrés. »

Je partage, complètement, l'opinion de mon jeune Camarade; pour la corroborer, si la chose était nécessaire, il suffirait de rappeler les paroles de Fermat : « *Décomposer un cube en deux*
» *autres cubes, une quatrième puissance, et généralement une*
» *puissance quelconque en deux puissances de même nom au-des-*
» *sus de la seconde puissance, est une chose impossible, et j'en ai*
» *assurément trouvé l'admirable démonstration.* La marge trop
» exiguë ne la contiendrait pas. » (*Observations sur Diophante*; traduction de Brassinne.) Si le grand Géomètre toulousain a fait cette naïve remarque, c'est que la marge était sans doute *presque suffisante;* et la démonstration, fort simple. Depuis deux siècles on la cherche inutilement. (E. C.)