

Article

Article

in: Nouvelle correspondance mathématique | Nouvelle correspondance  
mathématique - 5 | Sommaire. Sur la fréquence et la totalité des nombres  
premiers. Sur le...

## Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library. Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions. Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library. For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

### **Contact:**

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek  
Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

### **Purchase a CD-ROM**

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:  
Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen, Germany, Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

que celui-ci avait obtenus, ce semble, *par induction.* » (GAUSS, *Œuvres*, t. II, 2<sup>e</sup> édition, pp. 159-160.)

Antérieurement, dans le même recueil (12 mai 1808, *Œuvres*, t. II, pp. 151-152), GAUSS avait déjà énoncé la même pensée : « Les plus belles propriétés des nombres, dit-il, et, en particulier la loi de réciprocité des résidus quadratiques, sont faciles à trouver par induction, mais très-difficiles à démontrer. FERMAT connaissait le caractère quadratique des nombres  $-1$ ,  $\pm 2$ ,  $\pm 3$ , et il affirme même avoir la démonstration des théorèmes qui y sont relatifs. Comme il n'a rien publié sur la question, nous ne pouvons savoir s'il ne s'est pas trompé; mais cela est très-possible, car on peut citer de grands Géomètres qui se sont fait illusion sur la valeur de leurs démonstrations en Arithmétique supérieure, par exemple, EULER, LEGENDRE et FERMAT *lui-même.* »

Ici, comme on le voit, l'accusation est plus précise. En résumé, GAUSS dit : I. Il est probable que Fermat a trouvé ses théorèmes par induction. II. Il est possible qu'il n'en ait pas possédé de vraies démonstrations; car : 1<sup>o</sup> elles sont très-difficiles à trouver; 2<sup>o</sup> il s'est trompé lui-même sur la valeur de certaines de ses démonstrations.

Nous allons essayer d'établir précisément le contraire de la seconde assertion de Gauss; ce qui affaiblira, du même coup, la première, quoique, à la rigueur, on puisse admettre celle-ci.

(*La fin prochainement.*)

### QUELQUES IDENTITÉS.

$$\begin{aligned} \text{I. } & [x^3 - y^3 + 3xy(2x + y)]^3 + [y^3 - x^3 + 3xy(2y + x)]^3 \\ & = 27xy(x + y)(x^3 + xy + y^3)^3. \end{aligned}$$

(ÉDOUARD LUCAS.)

REMARQUE. D'après le Théorème de Fermat, le second membre ne saurait être un cube; donc :

L'équation

$$xy(x + y) = z^3 \dots \dots \dots (1)$$

est impossible.

La réciproque est vraie. Par conséquent, si l'on pouvait démontrer, simplement, ce dernier théorème, celui de Fermat s'ensuivrait. Mais l'équation (1) conduit, tout de suite, à celle-ci,

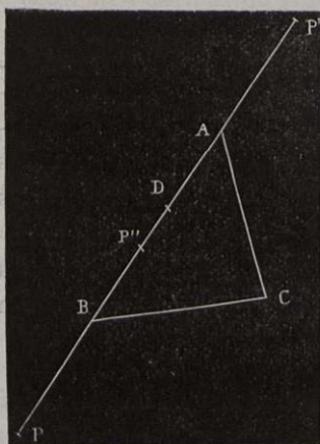
$$x'^3 + y'^3 = z'^3; \dots \dots \dots (2)$$

en sorte que l'on tourne dans un cercle.

II. Si  $2p = a + b + c$ , on a, *identiquement*,

$$p^2 + (p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

(E. C.)



A-t-on imprimé, quelque part, cette relation évidente? Quoi qu'il en soit, elle donne lieu aux propositions suivantes :

1° Soient, sur le côté AB d'un triangle ABC, D, P, P', P' les points de contact du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits : la somme des carrés des distances du sommet A, à ces quatre points, est égale à la somme des carrés des côtés;

2° Si l'on prend, sur une droite AB, deux points quelconques M, N (\*), on a, entre les six distances AM, AN, AB, MN, MB, NB, la relation

$$\overline{AM}^2 + \overline{MN}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{BM}^2 + (\overline{AM} + \overline{BN})^2.$$

(\*) Moyennant certaines restrictions, ces points peuvent être situés sur les prolongements de la droite.

3° La fonction  $(a^2 + b^2 + c^2 + bc + ca + ab)^2$ , égale à

$$[(a + c)(a + b)]^2 + [(b + c)(a + b)]^2 + (c^2 + ac + bc - ab)^2,$$

et égale, aussi, à

$$[a(a + b + c)]^2 + [b(a + b + c)]^2 + [c(a + b + c)]^2 + [bc + ca + ab]^2 (*),$$

est égale, encore, à

$$\frac{1}{2}[a^2 - b^2 + c^2 + (a + b)c - ab]^2 + \frac{1}{2}[b^2 - a^2 + c^2 + (a + b)c - ab]^2 \\ + \frac{1}{2}[a^2 + b^2 - c^2 + (a + b)c + 3ab]^2 + [a^2 + b^2 + c^2 + 3(a + b)c + ab]^2.$$

4° La fonction  $[a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2]^2$  égale

$$[a^2 - b^2 + c^2 + bc + ca - ab]^2 + [-a^2 + b^2 + c^2 + bc + ca - ab]^2 \\ + [a^2 + b^2 - c^2 + 3bc + 3ca + ab]^2 + [a^2 + b^2 + c^2 + bc + ca + 3ab]^2.$$

5° La fonction  $[(b + c)^2 + (c + a)^2 + (a + b)^2]^2$  égale

$$(a^2 - b^2 + c^2 + bc + ca - ab)^2 + (-a^2 + b^2 + c^2 + bc + ca - ab)^2 \\ + (a^2 + b^2 - c^2 + bc + ca + 3ab)^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + 3bc + 3ca + ab)^2 \\ = (b^2 - c^2 + a^2 + ca + ab - bc)^2 + (-b^2 + c^2 + a^2 + ca + ab - bc)^2 \\ + (b^2 + c^2 - a^2 + ca + ab + 3bc)^2 + (b^2 + c^2 + a^2 + 3ca + 3ab + bc)^2 \\ = (c^2 - a^2 + b^2 + ab + bc - ca)^2 + (-c^2 + a^2 + b^2 + ab + bc - ca)^2 \\ + (c^2 + a^2 - b^2 + ab + bc + 3ca)^2 + (c^2 + a^2 + b^2 + 3ab + 3bc + ca)^2;$$

etc.

6° Généralement, si un nombre pair est la somme de trois carrés, il est décomposable en quatre carrés. Il y a exception quand une des racines est égale à la somme des deux autres.

7° Soit, par exemple,  $N = 5^2 + 5^2 + 6^2$ . On trouve  $N = 7^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2$ ; puis, par les identités précédentes :

$$N^2 = (5^2 + 5^2 + 6^2)^2 = (7^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2)^2 \\ = 60^2 + 56^2 + 2^2 = 49^2 + 41^2 + 13^2 + 47^2; \text{ etc.}$$

(\*) N. C. M., t. I, pp. 152, 153 (1<sup>re</sup> édition).

$$\text{III.} \quad \left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1;$$

donc la somme des nombres  $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$ , plus la somme de leurs produits deux à deux, plus la somme de leurs produits trois à trois, ..., plus leur produit, égale  $n$ .

(ERNEST CESARO.)

$$\text{IV.} \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = C_{n,1} - \frac{1}{2} C_{n,2} + \frac{1}{3} C_{n,3} - \dots \pm \frac{1}{n} C_{n,n}.$$

(E. CESARO.)

Voilà encore deux relations curieuses, presque évidentes, et peut-être non remarquées jusqu'à présent. A propos de la deuxième (II), M. Brocard m'écrivait, récemment : « Il est à présumer que l'on finira, un jour, par réunir assez d'identités de ce genre, pour établir, d'une manière élémentaire, que tout nombre entier peut s'écrire sous forme d'une somme de quatre carrés. »

Je partage, complètement, l'opinion de mon jeune Camarade; pour la corroborer, si la chose était nécessaire, il suffirait de rappeler les paroles de Fermat : « Décomposer un cube en deux autres cubes, une quatrième puissance, et généralement une puissance quelconque en deux puissances de même nom au-dessus de la seconde puissance, est une chose impossible, et j'en ai assurément trouvé l'admirable démonstration. LA MARGE TROP EXIGÛ NE LA CONTIENDRAIT PAS. » (*Observations sur Diophante*; traduction de Brassinne.) Si le grand Géomètre toulousain a fait cette naïve remarque, c'est que la marge était sans doute presque suffisante; et la démonstration, fort simple. Depuis deux siècles on la cherche inutilement.

(E. C.)