

Article

Décomposition d'un cube en quatre cubes.

in: Nouvelle correspondance mathématique | Nouvelle correspondance  
mathématique - 4 | Note sur quelques équations indéterminées. Décomposition  
d'un cube en qu...

## Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library. Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions. Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library. For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

### **Contact:**

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek  
Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

### **Purchase a CD-ROM**

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:  
Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen, Germany, Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

où les indéterminées  $a, b, c$  peuvent recevoir des valeurs quelconques.

REMARQUES. Dans cet énoncé (où il est sous-entendu que les coefficients  $A, B, C$  sont des entiers premiers entre eux, et dégagés de tout facteur carré),  $\alpha, \beta, \gamma$ , et  $a, b, c$  peuvent être entiers ou fractionnaires. Si ces nombres sont entiers, les formules proposées donneront nécessairement des solutions entières.

Les expressions ci-dessus, de  $x, y, z$ , n'impliquent aucune restriction dans les données de la question. Ces expressions constituent, par conséquent, la solution complète de l'équation considérée, en ce sens que, pour des valeurs convenables de  $a, b, c$ , toute solution particulière s'y trouve comprise;  $\alpha, \beta, \gamma$  sont d'ailleurs des quantités quelconques, assujéties à la condition

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = 0.$$

(La suite prochainement.)

---

### DÉCOMPOSITION D'UN CUBE EN QUATRE CUBES.

(Suite et fin, voir t. IV, p. 332.)

VI. Les deux membres de l'égalité (A) sont divisibles par  $27x^9(x^6 - x^5 + 1)^5$ . Effectuant, on trouve l'identité

$$\begin{aligned} x^5(x^5 - 2)^5 + (2 - x)^5(x^5 + 1)^5 + (2x^5 - 1)^5 - (x^5 + 1)^5 \\ = 6(x - 1)^2(x^5 + 1)^5; \quad \dots \dots \dots \text{(E)} \end{aligned}$$

ou, plus simplement,

$$x^5 = 6(x - 1)^2 + (x - 2)^5 + 2. \quad \dots \dots \dots \text{(F)}$$

Si, comme dans les paragraphes I et III, on remplace  $x$  par  $1 + 6\left(\frac{a}{b}\right)^5$ , on obtient

$$(b^5 + 6a^5)^5 = (6a^5b)^5 + (6a^5 - b^5)^5 + 2(b^5)^5; \quad \dots \quad (G)$$

identité (\*) qui donne une infinité de solutions, entières et positives, de l'équation

$$N^5 = X^5 + Y^5 + 2Z^5.$$

Soient, par exemple,  $a=b=1$ ; valeurs d'où résultent celles-ci :

$$N = 7, \quad X = 6, \quad Y = 5, \quad Z = 1.$$

Cette solution est la plus simple possible.

VII. Il ne sera peut-être pas inutile de faire une seconde application de l'identité (A) (\*\*). En prenant  $x = \frac{7}{4}$ , ou  $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ , je trouve

$$\begin{aligned} & 5^5 \cdot 7^{12} \cdot 245^5 (545^2 - 345 \cdot 64 + 64^2)^5 + 5^5 \cdot 545^5 (345^3 + 64^3)^5 \\ & + 8^5 \cdot 511^5 (2 \cdot 545^3 - 6 \cdot 545^2 \cdot 64 - 64^3)^5 \\ & + 4^5 \cdot 407^5 (5 \cdot 345^3 - 9 \cdot 545^2 \cdot 64 + 3 \cdot 545 \cdot 64^2 - 64^3)^5 \\ & = 18^5 \cdot 545^5 (345^3 + 64^3)^5, \end{aligned}$$

ou

$$(5 \cdot 245 \cdot 2401 \cdot 98 \cdot 515)^5 + (5 \cdot 545 \cdot 40 \cdot 615 \cdot 751)^5 + (8 \cdot 511 \cdot 55 \cdot 267 \cdot 854)^5 \\ + (4 \cdot 407 \cdot 457 \cdot 954 \cdot 851)^5 = (18 \cdot 545 \cdot 40 \cdot 615 \cdot 751)^5.$$

Cette égalité est *irréductible*, en ce sens que les cinq cubes, qui y entrent, sont premiers entre eux. E. CATALAN.

P.-S. — En relisant le commencement de cette courte Note, je crains d'avoir été obscur, par trop de concision. Voici comment les premières lignes du paragraphe II doivent être entendues :

(\*) Elle a été employée par Le Besgue (*Exercices d'Analyse numérique*, p. 149).

(\*\*) Il s'y est glissé une faute typographique : le premier facteur, dans la deuxième ligne, est  $(2x^5 - 1)^5$ .

Dans le premier membre de l'identité (A), la somme des deux derniers termes :

$$(2x^5 - 1)^5 (2x^9 - 6x^6 - 1)^5 + (5x^9 - 9x^6 + 5x^3 - 1)^5 (x^3 + 1)^5$$

est, toute réduction faite,

$$27x^9(7x^{27} - 56x^{24} + 90x^{21} - 150x^{18} + 171x^{15} - 144x^{12} + 89x^9 - 56x^6 + 9x^3 - 2).$$

Chacun des autres termes de (A) étant divisible par  $(x^6 - x^3 + 1)^3$ , il en doit être ainsi de la quantité précédente. En effet, elle est réductible à

$$27x^9(x^6 - x^3 + 1)^3(7x^9 - 15x^6 + 5x^3 - 2).$$

Mais comme

$$7x^9 - 15x^6 + 5x^3 - 2 = (2x^3 - 1)^5 - (x^3 + 1)^5,$$

on a, *identiquement* :

$$\begin{aligned} (2x^3 - 1)^5 (2x^9 - 6x^6 - 1)^5 + (5x^9 - 9x^6 + 5x^3 - 1)^5 (x^3 + 1)^5 \\ = 27x^9 (x^6 - x^3 + 1)^3 [(2x^3 - 1)^5 - (x^3 + 1)^5]; \end{aligned}$$

et, par le changement de  $x^3$  en  $x$  :

$$\begin{aligned} (2x - 1)^5 (2x^3 - 6x^2 - 1)^5 + (5x^3 - 9x^2 + 5x - 1)^5 (x + 1)^5 \\ + 27x^3 (x^2 - x + 1)^3 (x + 1)^3 = 27x^3 (x^2 - x + 1)^3 (2x - 1)^5. \quad (B) \end{aligned}$$

---

## SUR UNE PROPRIÉTÉ DES DÉTERMINANTS NULS;

par M. FALK, professeur à l'Université d'Upsal.

---

Presque tous les Traités relatifs à la théorie des déterminants donnent, d'une manière ou d'une autre, ce théorème : *pour qu'un déterminant soit nul, il suffit qu'on puisse le mettre sous*