On obtiendra ainsi, par l'application du théorème fondamental :

1° La distance de deux points, ou plus généralement, la *puissance mutuelle* de deux éléments (points, droites, plans, sphères), dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, obliques, trilinéaires, tricirculaires, tétraédriques, tétrasphériques, ou dans les systèmes corrélatifs des coordonnées tangentielles, triponctuelles, cycloponctuelles, etc.

2° Les équations de ces différents éléments, dans les divers systèmes de coordonnées; et en particulier, les équations de la droite de l'infini, du plan de l'infini, des points circulaires à l'infini, du cercle de l'infini, etc.

Il résulte, d'ailleurs, de ces considérations, une extension toute naturelle du principe de dualité, que l'on pourrait appeler le PRINCIPE DE MUTUALITÉ, et que l'on peut énoncer ainsi :

Toute propriété descriptive ou métrique, exprimant une relation entre des points, des droites et des plans, s'applique au système plus général dans lequel on remplace les points, les droites et les plans par des cercles ou des sphères.

SUR UN PROBLÈME D'ARITHMÉTIQUE;

par M. H. POSTULA.

I

On sait que le *nombre des entiers premiers à* N *et non supérieurs à* N est donné par la formule d'Euler :

$$\varphi(\mathrm{N}) = \mathrm{N}\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\cdots,$$

a, b, c, ... étant les facteurs premiers de N, inégaux.

En suivant, mot à mot, la démonstration donnée par M. Catalan (*), j'ai pu déterminer la *somme des nombres premiers à* N *et inférieurs à* N.

Soit

$$N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots$$

La somme des nombres entiers, de 1 à N, est

$$\tfrac{1}{2}(1 + N)N. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

De même, la somme des multiples de a, non supérieurs à N, a pour expression

$$a \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{N}{a}\right)\frac{N}{a} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{N}{a}\right)N. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

L'excès de (1) sur (2) égale donc la *somme des nombres premiers avec* a *et inférieurs à* N. Cette somme est

$$\frac{1}{2}N^2\left(1 - \frac{1}{a}\right). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Retranchons-en la somme des multiples de b, premiers avec a : les autres ont déjà été retranchés.

Les multiples de b, premiers avec a, sont en nombre

$$\frac{N}{b} - \frac{N}{ab} = \frac{N}{b}\left(1 - \frac{1}{a}\right);$$

leur somme est

$$\frac{b + N - b}{2}\,\frac{N}{b}\left(1 - \frac{1}{a}\right) = \frac{N^2}{2b}\left(1 - \frac{1}{a}\right).$$

Donc, la *somme des nombres premiers avec* a *et* b, *et inférieurs à* N, égale

$$\frac{1}{2}N^2\left(1 - \frac{1}{a}\right) - \frac{1}{2}\frac{N^2}{b}\left(1 - \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2}N^2\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right) (**).$$

(*) *Nouvelles Annales*, t. I, p. 466 (1842).

(**) Ici, l'on peut abréger un peu : de $\frac{1}{2}N^2\left(1 - \frac{1}{a}\right)$, on doit retrancher b

De même, la somme des multiples de c, premiers avec a et b, qui n'ont pas été retranchés, et qui sont en nombre $\frac{N}{c}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$, est

$$\frac{N^2}{2c}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right).$$

Par suite, la *somme des nombres premiers avec* a, b, c, *et inférieurs à* N, égale

$$\frac{1}{2}N^2\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)-\frac{1}{2}\frac{N^2}{c}=\frac{1}{2}N^2\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right);$$

etc.

Donc, si l'on désigne par $\sigma(N)$ la *somme des nombres premiers à* N *et non supérieurs à* N, l'on a

$$\sigma(N)=\frac{1}{2}N^2\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots; \quad . \quad . \quad (4)$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\sigma(N)=\tfrac{1}{2}N\varphi(N). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Les formules (4) et (5) résolvent les deux questions proposées par M. Mennesson (*Nouvelle Correspondance*, t. IV, p. 127).

II

Supposons que N soit décomposé en m facteurs A, B, C, ..., premiers entre eux, deux à deux. La formule (5) donne

$$\sigma(A)\sigma(B)\sigma(C)\ldots=\frac{N}{2^m}\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)\ldots$$

---

fois la somme des nombres premiers avec a *et inférieurs à* $\frac{N}{b}$. D'après la formule (3), cette somme égale

$$b.\frac{1}{2}\frac{N^2}{b^2}\left(1-\frac{1}{a}\right);$$

etc. (E. C.)

Mais (*)

$$\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)\ldots = \varphi(N);$$

donc

$$\sigma(ABC\ldots) = \frac{1}{2^{m-1}}\sigma(A)\sigma(B)\varphi(C)\ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

On a aussi, par la formule d'Euler,

$$\varphi(N^m) = N^{m-1}\varphi(N);$$

et, en particulier,

$$\varphi(N^2) = N\varphi(N).$$

De là résulte que la relation (5) équivaut à :

$$\sigma(N) = \tfrac{1}{2}\varphi(N^2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Ainsi : *la somme des entiers premiers à* N *et inférieurs à* N, *est la moitié du nombre des entiers premiers à* N *et inférieurs à* N^2.

Notes du Rédacteur. — I. Après avoir publié, dans le numéro de mai, l'observation de M. le général de Marsilly, j'ai cherché la *solution* annoncée, d'abord dans les *Recherches arithmétiques*, ensuite dans les œuvres complètes de Gauss : contrairement à un célèbre adage, je n'ai rien trouvé! Voici donc, pour ainsi dire, une nouvelle édition de l'histoire des Propositions de Jansénius, affirmées par les uns, niées par les autres.

II. Ne pouvant mettre la main sur la démonstration de Gauss, j'en ai fait une autre, à peu près identique avec celle de M. Postula.

III. Presque toujours, *un théorème simple peut être démontré simplement.* Pour vérifier la formule

$$\sigma(N) = \tfrac{1}{2}N\varphi(N), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

il suffit d'observer que : 1° λ étant un nombre premier à N et

(*) *Disquisitiones arithmeticæ*, p. 34.

inférieur à N, N—λ jouit des mêmes propriétés; 2° $\lambda+(N-\lambda)=N$; 3° il y a $\varphi(N)$ nombres λ; 4° chacun d'eux a été compté deux fois.

IV. On peut écrire, sous forme abrégée,

$$\varphi(N)=N-\sum\frac{N}{a}+\sum\frac{N}{ab}-\sum\frac{N}{abc}+\cdots\quad\ldots\quad(8)$$

Cette formule en rappelle deux autres; la première, très-générale, due à M. Liouville (*); la seconde, qui donne *le nombre des nombres premiers inférieurs à* N^2, *quand on connaît les nombres premiers* α, β, γ, ... λ, *non supérieurs à* N :

$$\theta(N^2)=N^2-\sum\left(\frac{N^2}{\alpha}\right)+\sum\left(\frac{N^2}{\alpha\beta}\right)-\sum\left(\frac{N^2}{\alpha\beta\gamma}\right)+\cdots+\theta(N)-1;\quad(9)$$

ou, plus simplement,

$$\theta(N^2)-\theta(N)=N^2-\sum\left(\frac{N^2}{\alpha}\right)+\sum\left(\frac{N^2}{\alpha\beta}\right)-\sum\left(\frac{N^2}{\alpha\beta\gamma}\right)+\cdots-1\ (^{**}).\quad(10)$$

Ici, le symbole $\left(\frac{p}{q}\right)$ représente le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{p}{q}$ (***).

(*) *Journal de Mathématiques*, 2^{me} série, t. II, p. 111. Voici le théorème du célèbre Géomètre :

« 1, d, d', ..., étant les diviseurs de N; si l'on a

$$f(1)+f(d)+f(d')+\cdots+f(N)=F(N);$$

» on a aussi

$$f(N)=F(N)-\Sigma F\left(\frac{N}{\alpha}\right)+\Sigma F\left(\frac{N}{\alpha\beta}\right)+\Sigma F\left(\frac{N}{\alpha\beta\gamma}\right)+\cdots\text{ »}$$

(**) *Mélanges mathématiques*, p. 155.

(***) Legendre, et d'autres Géomètres, emploient la notation $E\left(\frac{p}{q}\right)$, plus expressive, mais un peu moins simple.

V. Touchant cette formule *exacte*, mais incommode, nous rappellerons que si l'on prend

$$\theta(\mathrm{N}^2) - \theta(\mathrm{N}) = \mathrm{N}^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\cdots - 1, \quad (11)$$

cette nouvelle formule, très-simple, sera souvent plus approximative qu'on ne serait tenté de le supposer (*). Remarquez, en outre, l'analogie entre le second membre et la valeur de φ (N^2).

NOTE SUR UN THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE;

par M. S. Realis.

Théorème. *Tout nombre entier est la somme de quarante-sept bicarrés (au plus), dont six sont égaux.*

Lemmes. — I. *Tout nombre entier est une somme de quatre carrés, dont l'un (sous certaines restrictions) est arbitraire* (**).

II. *Le sextuple d'un carré est une somme de douze bicarrés (au plus)* (***).

D'après le Lemme I, tout nombre entier x peut être repré-

(*) *Mélanges*, pp. 137, 138.

(**) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2me série, t. XII, pp. 217 et 222.

(***) Voir les *Exercices d'Analyse numérique*, par Le Besgue, p. 114; ou la *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. II, p. 101.