THÉORÈMES DE MM. SMITH ET MANSION (*).

I

PRÉLIMINAIRES. Soit N un nombre entier, composé de n facteurs premiers :

$$N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \cdots l^{\lambda}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

On sait que *le nombre des entiers premiers à* N, *et non supérieurs à* N, *est*

$$\varphi(N) = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \cdots l^{\lambda-1} (a-1)(b-1) \cdots (l-1) \text{ (**)} \quad . \quad (2)$$

Si l'on fait le produit des n binômes $a-1, b-1, \ldots l-1$, et qu'on le multiplie par $a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \ldots l^{\lambda-1}$, la formule précédente devient

$$\varphi(N) = l_1 - l_2 - l_3 + \cdots \pm l_{s-1} \mp l_s \text{ (***)}. \quad . \quad . \quad (3)$$

Dans celles-ci :

$$1^{\circ}\ l_1 = N; \quad 2^{\circ}\ s = 2^n; \quad 3^{\circ}\ l_s = \frac{N}{abc \cdots l}; \quad 4^{\circ}\ l_1, l_2, l_3, \cdots l_{s-1}, l_s$$

sont des *diviseurs de* N, *multiples de* l_s.

(*) *Sur la théorie des nombres*, par P. MANSION; paragraphe III : *généralisation d'un théorème de H. J. S. Smith*. Ce curieux et remarquable théorème a été proposé dans la *Nouvelle Correspondance* (QUESTION 324).

Au lieu de faire une simple analyse du nouveau travail de M. Mansion, nous le condensons, en modifiant la plupart des démonstrations employées par notre savant Collaborateur.

(**) *Nouvelles Annales*, tome I, p. 466 (1842); *Nouvelle Correspondance*, tome IV, p. 76.

(***) Ce développement, auquel personne n'avait songé, constitue, nous semble-t-il, l'*idée capitale* de M. Smith.

Pour effectuer le produit dont il vient d'être question, on peut convenir de *multiplier chaque terme d'un multiplicande partiel, par les deux termes du binôme multiplicateur*. D'ailleurs, le dernier facteur de φ (N) est (l — 1) (2). Nous sommes donc en droit de supposer :

$$l_1 = ll_2, \quad l_3 = ll_4, \quad \cdots \quad l_{s-1} = ll_s \text{ (*)}.$$

De cette simple remarque, résulte la transformation suivante :

$$\varphi(\mathrm{N}) = \sum \pm (l-1) l_q ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

l'indice q étant *pair*.

II

LEMME DE M. SMITH. *Pour tout nombre entier* N', *non multiple de* N, *on a*

$$\left[(l_1,\mathrm{N}') - (l_2,\mathrm{N}')\right] - \left[(l_3,\mathrm{N}') - (l_4,\mathrm{N}')\right] + \cdots$$
$$\pm \left[(l_{s-1},\mathrm{N}') - (l_s,\mathrm{N}')\right] = 0 ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

le symbole (x, y) *désignant, en général, le plus grand commun diviseur entre* x *et* y.

DÉMONSTRATION. Si N' est premier avec N, chacun des binômes se réduit à 1 — 1 ; et la proposition est évidente.

Supposons donc

$$\mathrm{N}' = a^{\alpha'} b^{\beta'} \ldots l^{\lambda'} \mathrm{N}'' ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

N'' étant premier avec N.

(*) Soit, par exemple, $\mathrm{N} = 90 = 2.3^2.5$. On a

$$\varphi(90) = 3(2-1)(3-1)(5-1) = (18 - 6 - 9 + 3)(5 - 1)$$
$$= (90 - 18) - (30 - 6) - (45 - 9) + (15 - 3).$$

Donc

$$l_1 = 90,\ l_2 = 18,\ l_3 = 30,\ l_4 = 6,\ l_5 = 45,\ l_6 = 9,\ l_7 = 15,\ l_8 = 3 ;$$

puis

$$l_1 = 5l_2,\ l_3 = 5l_4,\ l_5 = 5l_6,\ l_7 = 5l_8.$$

On ne saurait avoir, simultanément :

$$\alpha' \overline{\overline{>}} \alpha, \quad \beta' \overline{\overline{>}} \beta, \cdots \lambda' \overline{\overline{>}} \lambda;$$

car alors N′ serait divisible par N. Ainsi, *parmi les exposants* $\alpha', \beta' \ldots \lambda'$, *il y en a un, au moins, inférieur à l'exposant correspondant.* Soit pour fixer les idées,

$$\lambda' < \lambda : \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

nous pouvons écrire, au lieu de la formule (6),

$$N' = l^{\lambda'} N''', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

N‴ étant *premier avec* l.

Dans l'égalité (5), le terme général du premier membre est, par ce qui précède,

$$\pm [(ll_q, N') - (l_q, N')].$$

Or, lq a la forme $l^{\lambda-1}$ P, P étant *premier avec* l. D'après les relations (7), (8), on a :

$$(l_q, N') = l^{\lambda'}(P, N'''), \quad (ll_q, N') = l^{\lambda'}(P, N''') = (l_q, N') \text{ (*)};$$

donc *le premier membre de l'égalité* (5) *est composé de binômes nuls* (**) : cette égalité est démontrée.

(*) En général, $(am, b) = (a, b)$ *si le facteur* m *est premier avec le quotient de* b *par* (a, b) ; propriété évidente et connue.

(**) Cette conclusion pourrait être en défaut si l'on oubliait que nous avons désigné par l un facteur premier dont les exposants vérifient l'inégalité

$$\lambda' < \lambda.$$

Soient, par exemple, N = 90, N′ = 50. Supposant, comme ci-dessus :

$$l_1 = 90, \ l_2 = 18, \ l_3 = 30, \ l_4 = 6, \ l_5 = 45, \ l_6 = 9, \ l_7 = 15, \ l_8 = 3;$$

n aurait

$$(90, 50) - (18, 50) = 10 - 2, \quad (30, 50) - (6, 50) = 10 - 2,$$
$$(45, 50) - (9, 50) = 5 - 1, \quad (15, 50) - (3, 50) = 5 - 1.$$

Remarque. Si $N' = N$, le premier membre de l'égalité (5) devient

$$l_1 - l_2 - l_3 + l_4 - \cdots = \varphi(N). \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

III

Théorème de M. Smith. Il consiste en l'égalité

$$\begin{vmatrix} (1,1), & (1,2), & (1,3), & \cdots & (1,N), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & \cdots & (2,N), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & \cdots & (3,N), \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (N,1), & (N,2), & (N,3), & \cdots & (N,N) \end{vmatrix} = \varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(N). \quad . \quad (9)$$

Ainsi, *un certain déterminant, composé de* $1.2.3\ldots N$ *termes, est égal au produit de* N *facteurs entiers.* Cet énoncé est, certainement, l'un des plus curieux que l'on ait rencontrés dans la théorie des déterminants. La démonstration suivante, donnée par M. Smith, est fort simple.

A la dernière ligne, dont le rang est l, ajoutons les lignes dont les rangs l_4, l_6, $l_7 \ldots$ sont affectés du signe $+$, dans la formule (3), et retranchons celles dont les rangs sont affectés du signe $-$. En vertu du Lemme, *un terme quelconque du résultat* (le dernier excepté)] *est nul.* Quant au dernier terme $(N, N) = N = l_1$, il

---

Mais ici, $l = 3$; donc

$$l_1 = 90,\ l_2 = 30,\ l_3 = 18,\ l_4 = 6,\ l_5 = 45,\ l_6 = 15,\ l_7 = 9,\ l_8 = 3;$$

puis

$$(90, 30) - (30, 30) = 10 - 10 = 0, \quad (18, 30) - (6, 30) = 2 - 2 = 0,$$

$$(45, 30) - (15, 30) = 5 - 5 = 0, \quad (9, 30) - (3, 30) = 1 - 1 = 0.$$

devient $\varphi(N)$ (*). D'ailleurs, ces additions et soustractions n'ont pas altéré la valeur du déterminant (**).

En appelant Δ_N celui-ci, on a donc :

$$\Delta_N = \begin{vmatrix} (1,1), & (1,2), & \cdots & (1,N), \\ (2,1), & (2,2), & \cdots & (2,N), \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (N-1,1), & (N-1,2), & \cdots & (N-1,N), \\ 0, & 0, & \cdots & \varphi(N); \end{vmatrix}$$

ou

$$\Delta_N = \begin{vmatrix} (1,1), & (1,2), & \cdots & (1,N-1), \\ (2,1), & (2,2), & \cdots & (2,N-1), \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (N-1,1), & (N-1,2), & \cdots & (N-1,N-1) \end{vmatrix} \varphi(N);$$

c'est-à-dire

$$\Delta_N = \Delta_{N-1}\varphi(N).$$

Et comme $\Delta_1 = (1,1) = \varphi(1)$, on a, enfin,

$$\Delta_N = \varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(N); \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (10)$$

ce qui est le théorème de M. Smith.

IV

Théorème de M. Mansion. *Tout produit est égal à un déterminant* (***).

Pour rendre la démonstration plus claire, revenons au théo-

(*) Voir la *Remarque*, à la fin du paragraphe précédent.

(**) En général, *dét.*(A + B, B, C, ...) = *dét.*(A, B, C, ...).

(***) Cet énoncé n'est point tout à fait celui de l'auteur. Le nôtre fait resrème de M. Smith, en attribuant à N une valeur particulière; 6, par exemple. A cause de $\varphi(1)=1$, $\varphi(2)=1$, etc.; nous aurons

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, \\ 1, & 2, & 1, & 2, & 1, & 2, \\ 1, & 1, & 3, & 1, & 1, & 3, \\ 1, & 2, & 1, & 4, & 1, & 2, \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 5, & 1, \\ 1, & 2, & 3, & 2, & 1, & 6 \end{vmatrix} = \varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\varphi(4)\varphi(5)\varphi(6). \quad (11)$$

On sait que, d, d', d'', ... *étant les diviseurs d'un nombre* n :

$$\varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \cdots\cdots = n\ (^*).$$

---

sortir, nous semble-t-il, toute l'importance du nouveau théorème. Sous le rapport des applications, celui-ci nous paraît plus *utile*, même, que le célèbre théorème de VANDERMONDE :

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, & \cdots \\ a, & b, & c, & d, & \cdots \\ a^2, & b^2, & c^2, & d^2, & \cdots \\ a^3, & b^3, & c^3, & d^3, & \cdots \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix} = \pm (a-b)(a-c)(a-d)\cdots \times (b-c)(b-d)\cdots \times (c-d)\cdots.$$

(BRIOSCHI, *Théorie des déterminants*, traduction de COMBESCURE, p. 88; 1856.) Il est d'ailleurs bien entendu que nous faisons abstraction de l'identité insignifiante

$$\begin{vmatrix} a, & 0, & 0, & 0, & \cdots \\ 0, & b, & 0, & 0, & \cdots \\ 0, & 0, & c, & 0, & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & d, & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \cdots \end{vmatrix} = abcd\cdots;$$

et de celles qu'on en peut déduire.

(*) *Journal de Liouville*, t. IV, p. 7.

Ce théorème, appliqué à chacun des termes du déterminant considéré, permet de l'écrire ainsi :

$$\begin{vmatrix} \varphi(1), & \varphi(1), & \varphi(1), & \varphi(1), & \varphi(1), & \varphi(1), \\ \varphi(1), & \varphi(1)+\varphi(2), & \varphi(1), & \varphi(1)+\varphi(2), & \varphi(1), & \varphi(1)+\varphi(2), \\ \varphi(1), & \varphi(1), & \varphi(1)+\varphi(3), & \varphi(1), & \varphi(1), & \varphi(1)+\varphi(3), \\ \varphi(1), & \varphi(1)+\varphi(2), & \varphi(1), & \varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(4), & \varphi(1), & \varphi(1)+\varphi(2), \\ \varphi(1), & \varphi(1), & \varphi(1), & \varphi(1), & \varphi(1)+\varphi(5), & \varphi(1), \\ \varphi(1), & \varphi(1)+\varphi(2), & \varphi(1)+\varphi(3), & \varphi(1)+\varphi(2), & \varphi(1), & \varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(6). \end{vmatrix}$$

Afin de simplifier la notation, remplaçons $\varphi(1)$ par y_1, $\varphi(2)$ par y_2, ... Nous aurons, au lieu de l'égalité (11) :

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_1, & y_1, & y_1, & y_1, & y_1, \\ y_1, & y_1+y_2, & y_1, & y_1+y_2, & y_1, & y_1+y_2, \\ y_1, & y_1, & y_1+y_3, & y_1, & y_1, & y_1+y_3, \\ y_1, & y_1+y_2, & y_1, & y_1+y_2+y_4, & y_1, & y_1+y_2, \\ y_1, & y_1, & y_1, & y_1, & y_1+y_5, & y_1, \\ y_1, & y_1+y_2, & y_1+y_3, & y_1+y_2, & y_1, & y_1+y_2+y_3+y_6 \end{vmatrix} = y_1y_2y_3y_4y_5y_6 \text{ (*)}.$$

(*) En général, soit $x_{p,q}$ un terme quelconque du déterminant. Si D est le plus grand commun diviseur entre p et q, et que $1, d, d', d'', \dots$ soient les diviseurs de D :

$$x_{p,q} = y_1 + y_d + y_{d'} + \cdots + y_D.$$

De la 6e ligne, retranchons la 3e, la 2e; et au résultat, ajoutons la première. Cette 6e ligne devient, d'après le Lemme :

$$0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ y_6\ (*);$$

donc l'égalité précédente se réduit à

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_1, & y_1, & y_1, & y_1, \\ y_1, & y_1+y_2, & y_1, & y_1+y_2, & y_1, \\ y_1, & y_1, & y_1+y_3, & y_1, & y_1, \\ y_1, & y_1+y_2, & y_1, & y_1+y_2+y_4, & y_1, \\ y_1, & y_1, & y_1, & y_1, & y_5 \end{vmatrix} = y_1y_2y_3y_4y_5.$$

De même, celle-ci peut être changée en

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_1, & y_1, & y_1, \\ y_1, & y_1+y_2, & y_1, & y_1+y_2, \\ y_1, & y_1, & y_1+y_3, & y_1, \\ y_1, & y_1+y_2, & y_1, & y_1+y_2+y_4 \end{vmatrix} = y_1y_2y_3y_4;$$

etc. On arrive, enfin, à l'*identité*

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_1, \\ y_1, & y_1+y_2 \end{vmatrix} = y_1y_2;$$

donc toutes les égalités précédentes sont *identiques;* et le théorème de M. Mansion est démontré.

(*) Nous ferons observer, encore une fois, que *la fonction* (5) *est composée de termes égaux et de signes contraires, deux à deux.* Cette fonction est donc nulle, non-seulement si l'on remplace un diviseur quelconque n, de N, par sa valeur

$$\varphi(1) + \varphi(d) + \varphi(d') + \cdots;$$

mais encore si l'on substitue, à ce diviseur,

$$y_1 + y_d + y_{d'} + \cdots,$$

$y_1, y_d, y_{d'}, \ldots$ étant des quantités *quelconques*.

V

Applications. 1° Soient $y_1=1$, y_2-2, $y_3=3$, $y_4=4$. On doit avoir

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, \\ 1, & 3, & 1, & 3, \\ 1, & 1, & 4, & 1, \\ 1, & 3, & 1, & 7 \end{vmatrix} = 24.$$

En effet, le premier membre, développé, devient

$$\begin{vmatrix} 3, & 1, & 3 \\ 1, & 4, & 1 \\ 3, & 1, & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1, & 4, & 1 \\ 3, & 1, & 7 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3, & 1, & 7 \\ 1, & 1, & 1 \\ 3, & 1, & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, \\ 3, & 1, & 3, \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 44 - 12 - 8 - 0 = 24.$$

2° (*) Si $y_1=y_2=y_3=\ldots=y_N=1$, tous les termes du déterminant sont égaux à 1, excepté ceux qui forment la diagonale. Ceux-ci ont pour valeurs :

$$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 2,\ 4,\ 2,\ 4,\ 3,\ \cdots\ (^{**}).$$

conséquemment

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & \cdots \\ 1, & 2, & 1, & 1, & 1, & 1, & \cdots \\ 1, & 1, & 2, & 1, & 1, & 1, & \cdots \\ 1, & 1, & 1, & 3, & 1, & 1, & \cdots \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 2, & 1, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 1.$$

(*) Indiquée par M. Mansion.

(**) En général, $x_{p,p}$ *égale le nombre des diviseurs de* p : si p est *premier*, $x_{p,p}=2$.

3° Soient n quantités quelconques, $a, b, c, d, \ldots$ Prenons

$$y_1 = a - b,\ y_2 = a - c,\ \cdots\ y_n = b - c,\ y_{n+1} = b - d,\ \ldots$$
$$y_{2n+1} = c - d,\ \cdots.$$

Il résultera, de la comparaison du théorème de M. Mansion avec celui de Vandermonde, *deux déterminants, l'un composé de* n^2 *éléments, l'autre composé de* $\frac{n^2(n-1)^2}{4}$ *éléments, ayant mêmes valeurs absolues.*

Exemple :

$$a = 5,\quad b = 3,\quad c = 2,\quad d = 1;$$

donc

$$y_1 = 2,\quad y_2 = 3,\quad y_3 = 4,\quad y_4 = 1,\quad y_5 = 2,\quad y_6 = 1;$$

puis

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, \\ 5, & 3, & 2, & 1, \\ 25, & 9, & 4, & 1, \\ 125, & 27, & 8, & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2, & 2, & 2, & 2, & 2, & 2, \\ 2, & 5, & 2, & 5, & 2, & 5, \\ 2, & 2, & 6, & 2, & 2, & 6, \\ 2, & 5, & 2, & 6, & 2, & 5, \\ 2, & 2, & 2, & 2, & 4, & 2, \\ 2, & 5, & 6, & 5, & 2, & 10 \end{vmatrix} = -48.$$

E. Catalan.

NOTE SUR LA QUESTION 173 (*);

par M. Ed. Dewulf, chef de bataillon du Génie à Toulon.

Soient A, B, M les sommets d'un triangle curviligne formé par trois arcs de paraboles ayant leur foyer en F.

(*) Question 173 : *Dans tout triangle formé par trois arcs d'hyperboles*