

Article

Sur deux théorèmes de Sturm.

in: Nouvelle correspondance mathématique | Nouvelle correspondance
mathématique - 3 | Théorie du solitaire. Sur deux théorèmes de Sturm.

Aperçu de questions...

Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Göttingen State- and University Library. Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept these Terms and Conditions. Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Göttingen State- and University Library. For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek
Digitalisierungszentrum
37070 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Purchase a CD-ROM

The Göttingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:
Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen - Digitalisierungszentrum
37070 Göttingen, Germany, Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

SUR DEUX THÉORÈMES DE STURM.

Dans une Note *Sur la théorie des séries* (*), M. Mansion cherche à prouver qu'un théorème de Sturm, cité par nous (**), est inexact (***). La méthode employée par notre honorable Collaborateur est bien simple : il vérifie, sur un exemple particulier, que « ce théorème conduit à un résultat erroné (iv). » Cet exemple, emprunté à M. Darboux, ne nous semble pas bien choisi.

I

Rappelons d'abord, comme l'a fait M. Mansion, les paroles mêmes de l'illustre Professeur à l'École polytechnique :

« Si l'on peut exprimer $f(x)$ par une série convergente

$$(1) \quad \dots \quad f(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + r_n,$$

» on aura, en multipliant par dx , et en intégrant entre deux
» limites a et b ,

$$(2) \quad \dots \quad \int_a^b f(x) dx = \\ \int_a^b u_1 dx + \int_a^b u_2 dx + \dots + \int_a^b u_n dx + \int_a^b r_n dx.$$

» Si la série (1) est convergente pour $x = a$, $x = b$ et pour
» toutes les valeurs de x comprises entre a et b , on peut suppo-

(*) *N. C. M.*, juin 1877.

(**) *N. C. M.*, avril 1877, p. 112.

(***) Nous nous occuperons, plus loin, du *Second théorème de Sturm*.

(iv) *N. C. M.*, juin 1877, p. 200.

- » ser $r_n < \varepsilon$, ε étant une quantité aussi petite qu'on le veut,
 » pourvu que n soit assez grand. Dès lors...

$$\int_a^b r_n dx < \varepsilon(b-a).$$

- » Donc $\int_a^b r_n dx$ décroît jusqu'à zéro quand n augmente jusqu'à l'infini... (*). »

D'après ce passage, et le reste de la démonstration, Sturm faisait l'hypothèse suivante, qui se vérifie sur la plupart des séries connues : « à partir d'une certaine valeur de n , et pour toutes les valeurs de x , comprises entre a et b , le reste r_n est constamment inférieur à ε . »

Si l'on objectait que Sturm n'a pas énoncé, expressément, la phrase soulignée, nous répondrions : « La lettre tue, mais l'esprit vivifie (**). »

II

Ces préliminaires posés, voyons si l'exemple, cité par M. Mansion, est probant. Et d'abord, pour plus de clarté, faisons :

$$u_1 = v_1 - v_2, \quad u_2 = v_2 - v_3, \quad \dots, \quad u_n = v_n - v_{n+1}, \quad r_n = v_{n+1};$$

de manière que

$$v_1 = (v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + \dots + (v_n - v_{n+1}) + r_n.$$

Dans cet exemple (***) :

$$v_1 = 2xe^{-x^2}, \quad v_2 = 2 \cdot 2^2 xe^{-2^2 x^2}, \quad \dots, \quad v_n = 2n^2 xe^{-n^2 x^2},$$

$$r_n = 2(n+1)^2 xe^{-(n+1)^2 x^2}.$$

(*) STURM. *Cours d'Analyse de l'École polytechnique*, 1857, pp. 337, 338.

(**) *Deuxième épître aux Corinthiens*, III, 6.

(***) Nous avons changé les signes adoptés par M. Darboux, afin d'opérer sur des quantités positives.

Prenons encore, comme limites de x :

$$a = 0, \quad b = 1;$$

les valeurs extrêmes de r_n seront, en conséquence :

$$0, \quad r(n+1)^2 e^{-(n+1)^2}.$$

La dernière quantité, égale à

$$2 \frac{(n+1)^2}{e^{(n+1)^2}},$$

tend vers zéro quand n augmente; mais *il n'en est pas de même pour r_n .*

En effet, cette fonction a un maximum, déterminé par l'équation

$$e^{-(n+1)^2 x^2} - 2x^2(n+1)^2 e^{(n+1)^2 x^2} = 0;$$

ou, plus simplement, par l'équation

$$2(n+1)^2 x^2 = 1;$$

d'où l'on conclut

$$x = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}};$$

puis, pour le maximum de r_n :

$$M = (n+1) \sqrt{\frac{2}{e}}.$$

Ainsi, pour une valeur *très-petite* de x , le reste r_n peut devenir *excessivement grand*. L'hypothèse adoptée par Sturm, dans la démonstration de son théorème, ne subsistant plus, il est tout naturel que le théorème *semble* être en défaut.

III

Après avoir développé son calcul, M. Mansion dit, à peu près (*) :

« Pour que le premier théorème de Sturm soit applicable, il faut que l'on ait $\lim r_n = 0$, quels que soient n et x , même si l'on fait varier n et x à la fois. »

Si l'on fait varier, simultanément, n et x , on ne sait plus où l'on va : on s'expose à commettre des erreurs analogues à celles que nous avons signalées autrefois (**). Dans une lettre qu'il nous a fait l'honneur de nous adresser, notre jeune Collègue a reconnu la justesse de cette appréciation.

IV

Le second théorème de Sturm (***), beaucoup moins important que le premier, suppose encore

$$\lim. \int_a^b r_n dx = 0.$$

Si cette condition n'est pas remplie, le théorème ne subsiste plus.

C'est ce qui arrive pour la série, très-curieuse, considérée par M. Mansion :

$$(x - x^2 - x^5) + (x^2 - x^4 - x^5) + \dots + (x^n - x^{2n} - x^{2n+1}) + \dots$$

Quand x est une fraction proprement dite, la série est convergente :

$$r_n = x^{n+1} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad R_n = \int_0^{1-\varepsilon} x^{n+1} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} dx;$$

done $\lim R_n = 0$.

(*) N. C. M., juin 1877, p. 201.

(**) *Mélanges mathématiques*, pp. 557 et suivantes.

(***) N. C. M., juin 1877, p. 198.

Mais, comme le fait observer notre savant Collaborateur, pour $x = 1$, la fonction R_n devient

$$R_n = \int_0^1 (x^{n+1} + x^{n+2} + \dots + x^{2n+2}) dx,$$

ou

$$R_n = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+2};$$

et, en conséquence, $\lim R_n = 1.2$ (*).

Cette remarque intéressante, qui n'avait peut-être pas encore été faite, conduit à la proposition suivante :

« L'application du second théorème de Sturm exige que

$$\int_a^b r_n dx = 0$$

» pour n infini. »

E. CATALAN.

APERÇU DE QUESTIONS

SUR LES FAISCEAUX DE SURFACES DU DEUXIÈME ORDRE;

par M. PH. BRETON, ancien ingénieur des Ponts et Chaussées (Grenoble).

Il est arrivé, assez souvent, que certaines questions, résolues pour l'espace, ont donné une facilité singulière à la démonstration de questions analogues, appartenant à la Géométrie plane.

(*) L'avant-dernière ligne de la page 205 contient une faute : au lieu de $\frac{1}{2n-1}$, on doit lire $\frac{1}{2n}$.