SUR DEUX THÉORÈMES DE STURM.

Dans une Note *Sur la théorie des séries* (*), M. Mansion cherche à prouver qu'un théorème de Sturm, cité par nous (**), est inexact (***). La méthode employée par notre honorable Collaborateur est bien simple : il vérifie, sur un exemple particulier, que « ce théorème conduit à un résultat erroné (IV). » Cet exemple, emprunté à M. Darboux, ne nous semble pas bien choisi.

I

Rappelons d'abord, comme l'a fait M. Mansion, les paroles mêmes de l'illustre Professeur à l'École polytechnique :

« Si l'on peut exprimer $f(x)$ par une série convergente

$$(1) \quad . \; . \; . \quad f(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + r_n,$$

» on aura, en multipliant par dx, et en intégrant entre deux » limites a et b,

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \int_a^b f(x)dx =$$

$$\int_a^b u_1 dx + \int_a^b u_2 dx + \cdots + \int_a^b u_n dx + \int_a^b r_n dx.$$

» Si la série (1) est convergente pour $x = a$, $x = b$ et pour » toutes les valeurs de x comprises entre a et b, *on peut suppo-*

(*) *N. C. M.*, juin 1877.
(**) *N. C. M.*, avril 1877, p. 112.
(***) Nous nous occuperons, plus loin, du *Second théorème de Sturm*.
(IV) *N. C. M.*, juin 1877, p. 200.

» *ser* $r_n < \varepsilon$, ε étant une quantité aussi petite qu'on le veut,
» pourvu que n soit assez grand. Dès lors...

$$\int_a^b r_n dx < \varepsilon(b-a).$$

» Donc $\int_a^b r_n dx$ décroît jusqu'à zéro quand n augmente jus-
» qu'à l'infini... (*). »

D'après ce passage, et le reste de la démonstration, Sturm faisait l'hypothèse suivante, qui se vérifie sur la plupart des séries connues : « *à partir d'une certaine valeur de* n, *et pour toutes les*
» *valeurs de* x, *comprises entre* a *et* b, le reste r_n est constam-
» ment inférieur à ε. »

Si l'on objectait que Sturm n'a pas énoncé, expressément, la phrase soulignée, nous répondrions : « *La lettre tue, mais l'esprit vivifie* (**). »

II

Ces préliminaires posés, voyons si l'exemple, cité par M. Mansion, est probant. Et d'abord, pour plus de clarté, faisons :

$$u_1 = v_1 - v_2,\quad u_2 = v_2 - v_3,\quad \cdots,\quad u_n = v_n - v_{n+1},\quad r_n = v_{n+1};$$

de manière que

$$v_1 = (v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + \cdots + (v_n - v_{n+1}) + r_n.$$

Dans cet exemple (***) :

$$v_1 = 2xe^{-x^2},\quad v_2 = 2.2^2xe^{-2^2x^2},\quad \cdots,\quad v_n = 2n^2xe^{-n^2x^2},$$
$$r_n = 2(n+1)^2xe^{-(n+1)^2x^2}.$$

(*) STURM. *Cours d'Analyse de l'École polytechnique*, 1857, pp. 357, 358.

(**) *Deuxième épître aux Corinthiens*, III, 6.

(***) Nous avons changé les signes adoptés par M. Darboux, afin d'opérer sur des quantités positives.

Prenons encore, comme limites de x :

$$a = 0, \qquad b = 1;$$

les valeurs extrêmes de r_n seront, en conséquence :

$$0, \quad r(n+1)^2 e^{-(n+1)^2}.$$

La dernière quantité, égale à

$$2\frac{(n+1)^2}{e^{(n+1)^2}},$$

tend vers zéro quand n augmente; mais *il n'en est pas de même pour* r_n.

En effet, cette fonction a un maximum, déterminé par l'équation

$$e^{-(n+1)^2x^2} - 2x^2(n+1)^2 e^{(n+1)^2x^2} = 0;$$

ou, plus simplement, par l'équation

$$2(n+1)^2x^2 = 1;$$

d'où l'on conclut

$$x = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}};$$

puis, pour le maximum de r_n :

$$\mathrm{M} = (n+1)\sqrt{\frac{2}{e}}.$$

Ainsi, pour une valeur *très-petite* de x, le reste r_n peut devenir *excessivement grand.* L'hypothèse adoptée par Sturm, dans la démonstration de son théorème, ne subsistant plus, il est tout naturel que le théorème *semble* être en défaut.

III

Après avoir développé son calcul, M. Mansion dit, à peuprès (*) :

« Pour que le premier théorème de Sturm soit applicable, il » faut que l'on ait *lim* $r_n = 0$, *quels que soient* n *et* x, *même si* » *l'on fait varier* n *et* x *à la fois.* »

Si l'on fait varier, simultanément, n et x, *on ne sait plus où l'on va :* on s'expose à commettre des erreurs analogues à celles que nous avons signalées autrefois (**). Dans une lettre qu'il nous a fait l'honneur de nous adresser, notre jeune Collègue a reconnu la justesse de cette appréciation.

IV

Le second théorème de Sturm (***), beaucoup moins important que le premier, suppose encore

$$lim. \int_a^b r_n dx = 0.$$

Si cette condition n'est pas remplie, le théorème ne subsiste plus.

C'est ce qui arrive pour la série, très-curieuse, considérée par M. Mansion :

$$(x - x^2 - x^3) + (x^2 - x^4 - x^5) + \cdots + (x^n - x^{2n} - x^{2n+1}) + \cdots$$

Quand x est une fraction proprement dite, la série est convergente :

$$r_n = x^{n+1}\,\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad R_n = \int_0^{1-\varepsilon} x^{n+1}\,\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\,dx\,;$$

donc *lim* $R_n = 0$.

(*) *N. C. M.*, juin 1877, p. 201.

(**) *Mélanges mathématiques*, pp. 337 et suivantes.

(***) *N. C. M.*, juin 1877, p. 198.

Mais, comme le fait observer notre savant Collaborateur, pour $x = 1$, la fonction R_n devient

$$R_n = \int_0^1 (x^{n+1} + x^{n+2} + \cdots + x^{2n+2})dx,$$

ou

$$R_n = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+2};$$

et, en conséquence, *lim* $R_n = \mathrm{l}.\, 2$ (*).

Cette remarque intéressante, qui n'avait peut-être pas encore été faite, conduit à la proposition suivante :

« *L'application du second théorème de Sturm exige que*

$$\int_a^b r_n dx = 0$$

» *pour* n *infini.* »

E. Catalan.

APERÇU DE QUESTIONS
SUR LES FAISCEAUX DE SURFACES DU DEUXIÈME ORDRE;

par M. Ph. Breton, ancien ingénieur des Ponts et Chaussées (Grenoble).

Il est arrivé, assez souvent, que certaines questions, résolues pour l'espace, ont donné une facilité singulière à la démonstration de questions analogues, appartenant à la Géométrie plane.

(*) L'avant-dernière ligne de la page 203 contient une faute : au lieu de $\frac{1}{2n-1}$, on doit lire $\frac{1}{2n}$.