Il y aurait lieu de chercher les propriétés qui résultent de la situation relative de ces divers points, parmi lesquels le point I, par exemple, est celui dont la somme des distances aux trois sommets du triangle est minimum; propriété démontrée pour la première fois par Fermat, à qui Torricelli avait proposé ce problème, et qui en donna presque aussitôt trois solutions (*).

(*La fin prochainement.*)

SUR DIVERS ARTICLES DE M. MANSION.

I

Dans la Note intitulée : *Sur une formule analogue à celle de Leibniz* (**), notre honorable Collaborateur démontrait, d'une manière qui nous paraît bien compliquée, la relation

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

due à Leibniz ou à Gregory (***); et il ajoutait : « formule qui » n'est pas démontrée rigoureusement dans la plupart des ma- » nuels de Calcul infinitésimal. »

A notre question : « Quels sont ces *Manuels?* » M. M. a répondu (****), après avoir cité le *Cours d'Analyse* de M. Hermite :

(*) On peut consulter, sur cette question, les *Théorèmes et Problèmes de Géométrie*, p. 185 (1872).

(**) *N. C. M.*, tome II, p. 104.

(***) *Montucla*, tome II, p. 376.

(****) *N. C. M.*, tome II, pp. 308, 309.

« Il ne suffit pas .... que la série

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

» soit convergente pour $x = 1$, il faut aussi qu'elle soit con-
» tinue. On devrait donc, dans le cas actuel, avoir démontré,
» préalablement, l'égalité

$$\lim\left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right]_{x=1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots, \quad . \quad (A)$$

» ou

$$\lim(1 - x)\left[1 - \frac{1 + x + x^2}{3} + \frac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4}{5} - \cdots\right]_{x=1}$$
$$= 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

» ce que l'on ne fait pas d'ordinaire, quoique ce soit assez facile... »

II

Il nous semble que **M. M.** a vu des difficultés où il n'y en a pas, et que même il s'en crée à plaisir. En effet, *les plus simples notions* de la théorie des dérivées permettent d'établir, *en toute rigueur* (*), les relations :

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \pm \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \mp \varphi(x),$$

$$\varphi(x) > 0, \quad \varphi(x) < \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Il en résulte, pour $x^2 \overline{\overline{<}}\, 1$,

$$\lim \varphi(x) = 0;$$

(*) *Manuel des Candidats à l'École polytechnique*, tome I, p. 145. — *Cours d'Analyse de l'Université de Liége*, p. 149.

et, en conséquence,

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

Dès lors, à quoi bon l'intervention des égalités (A), (B), assez peu compréhensible d'ailleurs, surtout pour les élèves?

III

La recherche du développement de $\operatorname{arctg} x$ est un cas particulier de ce problème : « *Trouver le développement d'une fonction, connaissant le développement de la dérivée.* » A ce propos, rappelons la proposition suivante :

Si

$$f(x)=u_1+u_2+u_3+\cdots,$$

pour les valeurs de x *comprises entre* a *et* b, *on a*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b u_1dx+\int_a^b u_2dx+\cdots;$$

même si la seconde série cesse d'être convergente pour x = b.

Ce théorème, dont l'illustre Sturm a donné une démonstration qui nous paraît irréprochable (*), a-t-il cessé d'être vrai? Nous voudrions connaître, sur ce point, l'opinion de notre honorable et savant Collaborateur.

IV

Une *question paradoxale*, signalée par M. Laisant (**), a provoqué, de la part de notre jeune Collègue de Gand, une longue

(*) *Cours d'Analyse de l'École polytechnique*, tome I, p. 559 (1857).
(**) *N. C. M.*, tome II, p. 274.

réponse (*), assez péremptoire, mais au sujet de laquelle il nous permettra, cependant, de faire quelques observations.

1° M. M. dit d'abord : « pour ces valeurs de $z\,(zi = \mp \infty)$ (**),

$$\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \ldots \quad \text{(C)}$$

» sont infinies. »

Cette affirmation *paraît* contradictoire avec celle-ci :

« Même pour $zi = \infty$,

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1. \text{»}$$

L'*antinomie* résulte, tout simplement, d'un manque de précision dans la première phrase : pour $zi = +\infty$, $\cos z = +\infty$; mais $\sin z = -i\infty$.

Du reste, l'argumentation de M. M. eût été bien plus claire si, comme on le fait presque toujours, il avait remplacé les égalités (C) par les *formules de définition* :

$$\sin zi = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\,i, \quad \cos zi = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \ldots \quad \text{(D)}$$

et qu'il eût fait tendre z vers l'*infini réel*.

2° « Si ai croît indéfiniment, ... $(a + b)i$ croît aussi indéfi-
» niment ... »

Peut-on dire qu'*une imaginaire croît ?* Peut-on même dire qu'*une imaginaire surpasse une autre imaginaire?* Nous ne le pensons pas : c'est pour ce motif que nous n'employons jamais la dénomination de *quantités imaginaires*. Mais M. M. pouvait conclure, des relations (D) :

$$\operatorname{tg} zi = \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}}\,i;$$

(*) *N. C. M.*, tome II, p. 369.

(**) Il aurait dû dire : « *pour ces valeurs de* zi. »

puis

$$\operatorname{tg}(zi+b)=\frac{\dfrac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}i+\operatorname{tg}b}{1-i\operatorname{tg}b\dfrac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}};$$

puis, pour z *infini* :

$$\operatorname{tg}(zi+b)=\frac{i+\operatorname{tg}b}{1-i\operatorname{tg}b}=i\ (^*).$$

3° « Cette question (**) est donc bien propre à éveiller l'atten-
» tion des bons élèves sur le sens vrai de certaines équations
» symboliques. »

Quand bien même notre honorable Collaborateur aurait absolument raison, au fond, nous ne pourrions partager sa manière de voir, quant à l'*utilité* du problème dont il s'agit. Il y a, nous semble-t-il, tant de questions intéressantes, propres à former le jugement, qu'il ne faut pas recourir à de véritables subtilités, rappelant ces discussions *mystico*-métaphysiques, si chères aux *abstracteurs* de *quintessence!* Admettons l'équivalence des équations

$$\operatorname{arctg}x=i,\qquad x=i\infty+b:$$

comment cette proposition servira-t-elle à l'éducation *logique* de l'élève? Le moindre théorème d'Arithmétique ou de Géométrie serait bien plus efficace.

V

Dans cette même Note, M. Mansion, invoquant les noms les plus illustres, plaide en faveur de l'*étendue à* n *dimensions*. Il trouve

---

(*) C'est ce qu'a fait M. MISTER, *N. C. M.*, tome III, p. 49. On suppose, bien entendu, que $\operatorname{tg}b$ n'est pas égale à i.

(**) « *Si* $\operatorname{tg}a=\mp i$, *on a aussi* $\operatorname{tg}(a+b)=\mp i$, *quelle que soit la valeur* » *réelle ou imaginaire de* b. »

« ce langage symbolique parfaitement clair. » Soit; mais l'emploi de dénominations que l'on ne peut expliquer *naturellement* (*), constitue, nous semble-t-il, un danger sérieux : après la *Géométrie non-euclidienne* et *l'étendue à* n *dimensions*, voici venir la *Géométrie pan-imaginaire*, ou *à* $\frac{l}{m}$ *dimensions*, qui « *se rattache* » *à l'Arithmétique à* $\frac{l}{m}$ *chiffres, ainsi qu'à l'Algèbre à* $\frac{l}{m}$ *équations.* » *Cet ensemble constitue les Mathématiques pan-imaginaires* (**). » Où s'arrêtera-t-on dans cette voie (***)? E. CATALAN.

P.-S. Les critiques précédentes ne nous empêchent pas de rendre justice à un jeune et savant Collègue, déjà connu par d'honorables travaux. Tout dernièrement, M. Mansion a présenté, à l'Académie de Belgique, un Mémoire sur *l'intégration des équations*, Mémoire dans lequel il démontre ce théorème bien remarquable, que nous signalons à l'attention des Géomètres :

Toute équation différentielle, du premier ordre, est réductible à l'équation de Clairaut.

(*) De l'aveu même de *nos nouveaux Docteurs*, dans l'étendue à *n* dimensions, ils ne cherchent ni dimensions ni étendues : ils veulent, seulement, pétrir des formules!

(**) LÉOPOLD HUGO. — *Note adressée à l'Académie des Sciences.* Avant d'avoir inventé la Géométrie pan-imaginaire, l'infatigable auteur avait créé la *Géométrie Hugodomoïdale,* dont l'épigraphe est « *Suppression de la sphère!* » (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* avril 1876.)

(***) On peut lire, dans le dernier numéro du *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, l'énoncé suivant, traduit du célèbre RIEMANN :

» *Si, à l'intérieur d'une variété étendue d'une manière continue, toute* » *variété de* n *dimensions est limitante à l'aide de* m *segments de variétés* » *de* n *dimensions, fixes et non limitants par eux-mêmes, cette variété a* » *une connexité* (m + 1) *-uple de* $n^{\text{ième}}$ *dimension....* »

Il est à croire que, pour les *initiés*, la proposition est intelligible : mais qu'en auraient dit ces *profanes* nommés Monge, Dupin, Bobillier, Poncelet, ...?