EXTRAITS ANALYTIQUES.

CALCUL DE $1 \pm \sin(2p+1)u$, EN FONCTION DE $x = \sin u$.

On trouve facilement :

$$\sin 2u = 2x\sqrt{1-x^2}, \qquad \cos 2u = 1 - 2x^2;$$

puis :

$$\begin{array}{ll}
\sin u = x, & \cos u = \sqrt{1-x^2}, \\
\sin 3u = 3x - 4x^3, & \cos 3u = (1-4x^2)\sqrt{1-x^2}, \\
\sin 5u = 5x - 20x^3 + 16x^5, & \cos 5u = (1-12x^2+16x^4)\sqrt{1-x^2}, \\
\ldots & \ldots
\end{array}$$

On voit par là que $\sin(2p-1)u$ est, probablement, une fonction entière E de x^2, multipliée par x, et $\cos(2p-1)u$ une fonction entière F de x^2, multipliée par $\sqrt{1-x^2}$. Il est facile de démontrer que cette proposition est générale. On a, en effet,

$$\begin{aligned}
\sin(2p+1)u &= \sin 2u \cos(2p-1)u + \cos 2u \sin(2p-1)u \\
&= 2x.\sqrt{1-x^2}.\mathrm{F}.\sqrt{1-x^2} + (1-2x^2)x\mathrm{E} \\
&= x.\text{fonction entière de } x^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(2p+1)u &= \cos 2u \cos(2p-1)u - \sin 2u \sin(2p-1)u \\
&= (1-2x^2).\mathrm{F}.\sqrt{1-x^2} - 2x.\sqrt{1-x^2}.x.\mathrm{E} \\
&= \sqrt{1-x^2}.\text{fonct. ent. de } x^2.
\end{aligned}$$

De là résulte que

$$1 - \sin(2p+1)u = (1 \pm x)\left[(1,x)^p\right]^2,$$

$$1 + \sin(2p+1)u = (1 \mp x)\left[(1,-x)^p\right];$$

$(1, x)^p$ représentant une fonction entière de x, d'ordre p, et $(1, -x)^p$ la même fonction de $-x$. En effet, c'est seulement de cette manière que l'on peut avoir

$$\cos^2(2p+1)u = (1-x^2)\left[(1,x^2)^p\right]^2.$$

Il est facile de vérifier que

$$1 + (-1)^p \sin(2p+1)u = (1+x)\left[(1,x)^p\right]^2,$$

$$1 - (-1)^p \sin(2p+1)u = (1-x)\left[(1,-x)^p\right]^2.$$

Pour trouver $(1, x)^p$, posons $u = \frac{1}{2}\pi - \theta$. Il vient, immédiatement,

$$(1,x)^p = \frac{\cos\left(p+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} = \cos p\theta - \sin p\theta\,\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Soient, en outre : $i = \sqrt{-1}$, et

$$\cos p\theta + i\sin p\theta = \left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^p = \mathrm{X} + i\mathrm{Y}\sqrt{1-x^2}.$$

On aura

$$\cos p\theta = \mathrm{X}, \qquad \sin p\theta = \sin\theta.\mathrm{Y};$$

et, par suite,

$$(1,x)^p = \mathrm{X} - \mathrm{Y}(1-x).$$

Exemple. Soit $p = 3$. On a

$$1 - \sin 7u = (1+x)\left[(1,x)^3\right]^2,$$

$$(1,x)^3 = \mathrm{X} - \mathrm{Y}(1-x),$$

$$\mathrm{X} + i\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Y} = \left[x + i\sqrt{1-x^2}\right]^3,$$

$$\mathrm{X} = -3x + 2x^3, \qquad \mathrm{Y} = -1 + 4x^2.$$

Donc

$$1 - \sin 7u = (1 + x)(1 - 4x - 4x^2 + 8x^3)^2.$$

On a encore

$$(1,\ x)^p = \frac{1}{\sin\theta}\left[\sin(p+1)\theta - \sin p\theta\right];$$

mais cette formule est moins bonne que la précédente, pour le calcul pratique de $\sin(2p+1)u$.

Ce qui précède s'étend aux fonctions elliptiques (A. Cayley, *Messenger of Mathematics*, 1875, t. V, n° 49, pp. 7-8).

(P. Mansion.)

Note du Rédacteur. — Pour plus de clarté, faisons les quatre hypothèses suivantes :

1°. $p = 4k$, 2°. $p = 4k + 1$, 3°. $p = 4k + 2$, 4°. $p = 4k + 3$.

Il en résulte, respectivement :

1°. $\cos p\theta = \cos 4ku = \cos pu$, $\sin p\theta = -\sin 4ku = -\sin pu$;

2°. $\cos p\theta = \sin(4k+1)u = \sin pu$, $\sin p\theta = \cos(4k+1)u = \cos pu$;

3°. $\cos p\theta = -\cos(4k+2)u = -\cos pu$, $\sin p\theta = \sin(4k+2)u = \sin pu$;

4°. $\cos p\theta = -\sin(4k+3)u = -\sin pu$,

$\sin p\theta = -\cos(4k+3)u = -\cos pu$;

puis, par les formules de Lagrange (*) :

1°. $X = \cos pu$

$$= 1 - \frac{p^2}{2}x^2 + \frac{p^2(p^2-2^2)}{2.3.4}x^4 - \frac{p^2(p^2-2^2)(p^2-4^2)}{2.3.4.5.6}x^6 + \cdots + 2^{p-1}x^p,$$

$$Y = -\frac{\sin pu}{\cos u}$$

$$= -px + \frac{p(p^2-2^2)}{2.3}x^3 - \frac{p(p^2-2^2)(p^2-4^2)}{2.3.4.5}x^5 + \cdots + 2^{p-1}x^{p-1};$$

(*) *Journal de l'École polytechnique, douzième Cahier*, pp. 90 et suivantes.

2°. $X = \sin pu$

$$= px - \frac{p(p^2-1^2)}{2.3}x^3 + \frac{p(p^2-1^2)(p^2-3^2)}{2.3.4.5}x^5 - \cdots + 2^{p-1}x^p,$$

$$Y = \frac{\cos pu}{\cos u} = 1 - \frac{p^2-1^2}{2}x^2 + \frac{(p^2-1^2)(p^2-3^2)}{2.3.4}x^4 - \cdots + 2^{p-1}x^{p-1};$$

$$3^\circ.\ X = -\cos pu = -1 + \frac{p^2}{2}x^2 - \frac{p^2(p^2-2^2)}{2.3.4}x^4 - \cdots + 2^{p-1}x^p,$$

$$Y = \frac{\sin pu}{\cos u}$$

$$= px - \frac{p(p^2-2^2)}{2.3}x^3 + \frac{p(p^2-2^2)(p^2-4^2)}{2.3.4.5}x^5 - \cdots + 2^{p-1}x^{p-1};$$

4°. $X = -\sin pu$

$$= -px + \frac{p(p^2-1^2)}{2.3}x^3 - \frac{p(p^2-1^2)(p^2-3^2)}{2.3.4.5}x^5 + \cdots + 2^{p-1}x^p,$$

$$Y = -\frac{\cos pu}{\cos u}$$

$$= -1 + \frac{p^2-1^2}{2}x^2 - \frac{(p^2-1^2)(p^2-3^2)}{2.3.4}x^4 + \cdots + 2^{p-1}x^{p-1}.$$

Au moyen de ces expressions, la formule de M. Cayley :

$$(1, x)^p = X + xY - Y$$

donne, dans le premier cas :

$$(1, x)^p = 1 + px - \frac{(p+2)p}{1.2}x^2 - \frac{(p+2)p(p-2)}{1.2.3}x^3$$

$$+ \frac{(p+4)(p+2)p(p-2)}{1.2.3.4}x^4 + \frac{(p+4)(p+2)p(p-2)(p-4)}{1.2.3.4.5}x^5$$

$$- \cdots - 2^{p-1}x^{p-1} + 2^p x^p.$$

Par exemple,

$$(1, x)^4 = 1 + 4x - 12x^2 - 8x + 16x^4;$$

Etc.