QUELQUES THÉORÈMES SUR LA COURBURE DES LIGNES (*).

I. Soient $l$, $m$, $n$ les cosinus directifs de la binormale à une ligne $L$; soient $l'$, $m'$, $n'$, $l''$, $m''$, $n''$ les dérivées de $l$, $m$, $n$; l'arc $s$ étant pris pour variable indépendante. La courbure de $L$ a pour expression :

$$\frac{4}{\rho} = \frac{\Sigma (lm' - ml) n''}{\Sigma m''}(**) .$$

II. Soient $\frac{4}{A}$, $\frac{4}{B}$, $\frac{4}{C}$ les courbures des projections de $L$, sur trois plans rectangulaires. Soient encore $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles formés, avec les axes, par la tangente à $L$. On a

$$\frac{4}{\rho^2} = \frac{\sin^6 \alpha}{A^2} + \frac{\sin^6 \beta}{B^2} + \frac{\sin^6 \gamma}{C^2} .$$

III. Les rayons $A$, $B$, $C$ (pris avec des signes convenables), et les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, satisfont à la condition

$$\frac{\sin^3 \alpha \cos \alpha}{A} + \frac{\sin^3 \beta \cos \beta}{B} + \frac{\sin^3 \gamma \cos \gamma}{C} = 0 .$$

IV. Si $\gamma = \frac{\pi}{2}$, les deux dernières équations se réduisent à

$$\frac{4}{\rho^2} = \frac{\sin^6 \alpha}{A^2} + \frac{\cos^6 \alpha}{B^2} , \quad \frac{\sin^2 \alpha}{A} - \frac{\cos^2 \alpha}{B} = 0 .$$

On conclut, de celles-ci: $\rho = A + B$.

Ainsi : Le rayon de courbure, d'une ligne quelconque, est égal à la somme des rayons de courbure des projections de cette ligne sur deux plans parallèles au premier rayon, et perpendiculaires entre eux (***) .

(E. C.)

(*) Extraits d'un Mémoire inédit.

(**) Cette formule, peu pratique, est tout à fait semblable à celle qui donne la torsion.