V. La somme des cubes de deux termes consécutifs, diminuée du cube du terme qui précède, est encore un terme de la série, et l'on a

$$u_n^3 + u_{n+1}^3 - u_{n-1}^3 = u_{3n+2}.$$

VI. On a les formules symboliques

$$u_{n+p} = u_{n-p}(u+1)^p,$$
$$u_{n-p} = u_n(u-1)^p,$$

qui se déduisent, de la loi de formation de la série, d'une façon entièrement analogue à celle qui nous a permis d'établir les formules correspondantes des combinaisons (*).

On pourrait trouver, par la même voie, un grand nombre de relations nouvelles.

NOTE SUR UN LIEU GÉOMÉTRIQUE.

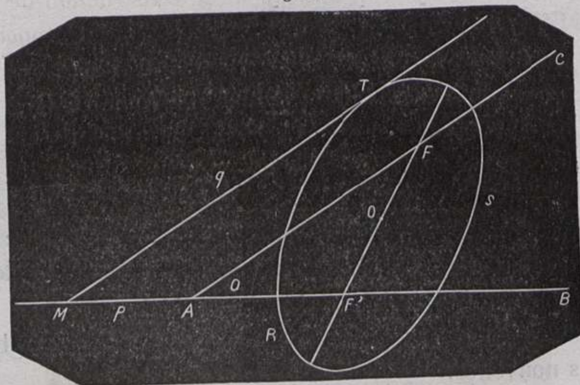
I. *Une conique, donnée de forme et de grandeur, se déplace de manière que chacun de ses foyers reste sur une droite donnée. Dans chaque position, on mène, à la conique, des tangentes parallèles à la droite que décrit l'un des foyers. Déterminer le lieu des points de contact* (**).

(*) Toutes ces propriétés sont fort remarquables. Nous croyons savoir que notre jeune collaborateur en a déduit des conséquences importantes, relatives surtout à la théorie des nombres premiers.

(**) Une lettre d'Alger nous apprend que cette question vient d'être proposée, comme sujet de *composition écrite,* pour l'admission à l'École polytechnique (1875). Sans doute à cause de sa difficulté, elle a été *retirée* partout, excepté en Algérie. Comment les élèves du Lycée d'Alger ont-ils pu être comparés à ceux des autres Lycées de France? C'est ce que notre honorable correspondant s'est demandé.

AB, AC étant les droites données; soit RST une position quelconque de l'ellipse mobile, dont F, F' sont les foyers. Soit encore

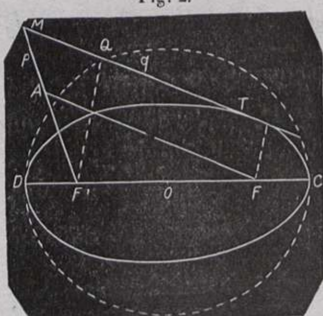
Fig. 1.



TM une tangente parallèle à CA : les coordonnées du point de contact T sont AM $= p$, MT$= q$. Il s'agit de trouver la relation qui existe entre p et q.

II. Cette relation ne sera pas altérée, si l'on rend l'*ellipse fixe* et l'*angle* BAC *mobile* (*). Le problème est donc ramené à celui-ci :

Fig. 2.

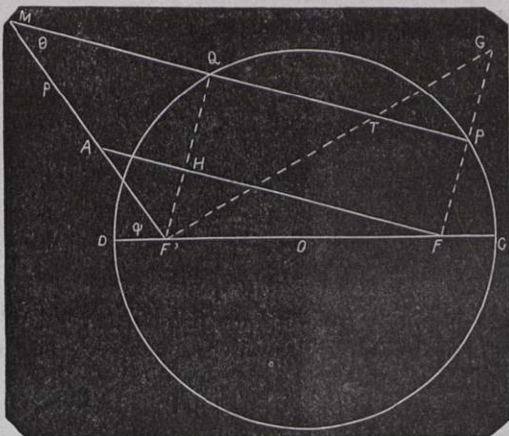


Un angle, de grandeur donnée, se meut de manière que l'un de ses côtés passe par le foyer F' *d'une ellipse donnée, et que le second côté* MT *reste tangent à l'ellipse. Du second foyer* F, *on mène* FA *parallèle à* TM. *Quelle est la relation entre* TM $=$ q *et* MA$=$ p?

(*) Le même artifice peut être employé dans tous les problèmes où l'on doit faire intervenir, en dernière analyse, les considérations de mouvements relatifs. J'en ai fait usage, autrefois, pour résoudre cette question : *Une ellipse roulant dans un angle droit, quel est le lieu décrit par chacun des foyers?*

III. Si l'on fait attention que la *podaire* de l'ellipse, par rapport aux deux foyers, est la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre, et si l'on se rappelle la construction de la tangente à l'ellipse, on peut encore transformer ainsi l'énoncé :

Fig. 3.



Sur un diamètre **CD** *du cercle* **O**, *on donne deux points* **F, F'**, *également éloignés du centre. On mène, dans une direction quelconque, les droites* **FP, F'Q**, *parallèles entre elles. On prend le point* **G**, *symétrique de* **F** *relativement à* **P**, *et l'on mène* **GF'**. *On trace* **PQM**, *qui coupe en* **T** *la droite* **F'G** ; *puis* **FA** *parallèle à* **PQM**, *puis* **F'AM** *faisant, avec ces deux droites, un angle donné* θ. *Quelle est la relation entre* $\mathrm{TM} = q$ *et* $\mathrm{AM} = p$?

Soient $OC = a$, $OF = c$, $FP = \alpha$, $F'Q = \beta$, $PQ = \delta$.

On a

$$\alpha\beta = a^2 - c^2 = b^2, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

$$p = \frac{\alpha}{\sin\theta}, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

$$\delta^2 = 4c^2 - (\beta - \alpha)^2, \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

$$q = \mathrm{MQ} + \mathrm{QT} = \beta\cot\theta + \delta\frac{\beta}{\alpha + \beta} \quad \ldots \quad (4)$$

Il faut éliminer α, β et δ.

Or :

$$\alpha = p \sin\theta, \quad \beta = \frac{b^2}{p\sin\theta},$$

$$\delta^2 = 4c^2 - \left(\frac{b^2}{p\sin\theta} - p\sin\theta\right)^2 = \frac{-b^4 + 2(b^2+2c^2)p^2\sin^2\theta - p^4\sin^4\theta}{p^2\sin^2\theta};$$

donc la relation demandée est

$$q = \frac{b^2}{p}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \pm \frac{b^2}{(b^2+p^2\sin^2\theta)p\sin\theta}\sqrt{-b^4+2(b^2+2c^2)p^2\sin^2\theta - p^4\sin^4\theta}. \quad (A)$$

IV. *Cas particuliers.* 1° Si l'angle θ est droit, l'équation (A) se réduit à

$$q = \pm\frac{b^2}{b^2+p^2}\sqrt{-b^4+2(b^2+2c^2)p^2 - q^4}. \quad . \quad . \quad (B)$$

2° Si $c = 0$, auquel cas l'ellipse se change en cercle, on a

$$q = \frac{a^2}{p}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \pm \frac{a^2(a^2 - p^2\sin^2\theta)}{(a^2+p^2\sin^2\theta\, p\sin\theta)}\sqrt{-1}.$$

Cette équation se décompose en

$$p = \pm\frac{a}{\sin\theta}, \quad q = \pm a\cot\theta.$$

Ainsi, le lieu demandé (I) se réduit au système de quatre points, extrémités de deux diamètres; ce qui est visible.

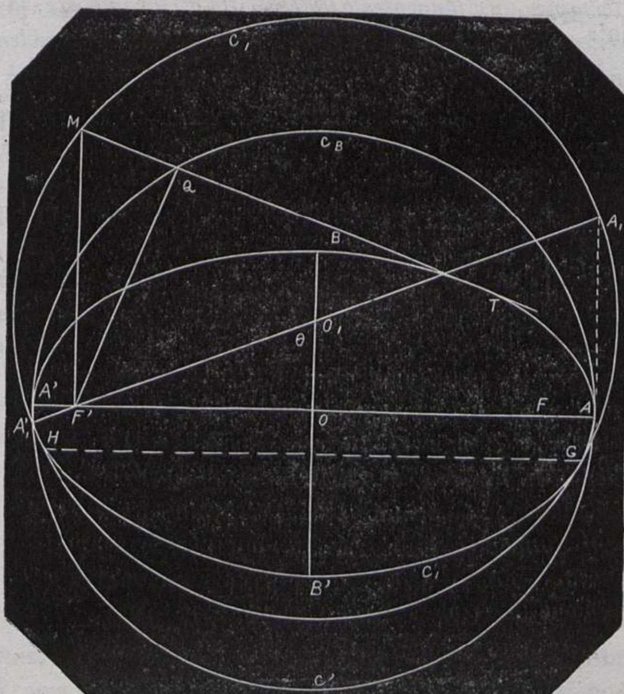
V. Pendant que le point Q, projection de F sur la tangente MT (fig. 3), décrit la circonférence CPQD, le sommet M de l'angle F′MT décrit une autre circonférence.

En effet, les *rayons vecteurs* F′Q, F′M *sont dans un rapport constant, et font entre eux un angle constant.* Si l'on désigne par k la tangente de l'angle θ, que l'on prenne le centre O pour origine, et que l'on compte les abscisses sur OF′, on trouve aisément, comme équation de la seconde circonférence,

$$(x^2+y^2-a^2)k^2 - 2cky - b^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

VI. Soient (fig. 4) ABA′B′ l'ellipse donnée, et ACA′C′ la circonférence décrite sur AA′ comme diamètre. Par le foyer F′, menons la droite $A'_1F'O_1A_1$ faisant, avec BB′, l'angle θ, et rencontrant, en A'_1, A_1, les perpendiculaires AA_1, $A'A'_1$ à AA′. Dans le cercle cherché (C), les points A_1, O_1, A'_1 sont homologues de A, O, A′. Donc ce cercle est celui qui est décrit sur $A_1A'_1$ comme diamètre. On arrive à la même conséquence, si l'on discute l'équation (C).

Fig. 4.



VII. Combinons cette équation avec celle de l'ellipse :

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Il en résulte, par l'élimination de x^2,

$$(cky + b^2)^2 = 0.$$

Par conséquent, *la circonférence* (C) *est, en général, double-*

ment tangente à l'ellipse donnée. La corde de contact, GH, est représentée par

$$y = -\frac{b^2}{ck} \text{ (*)}.$$

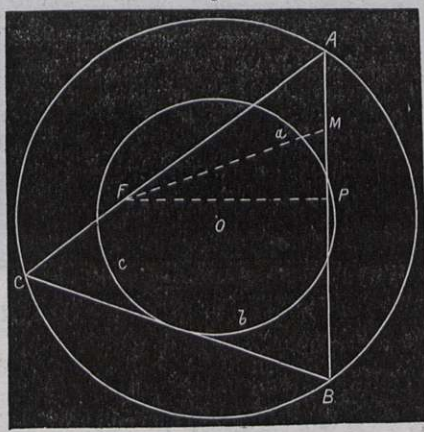
VIII. La propriété précédente est indépendante de l'angle θ, pourvu qu'il soit compris entre certaines limites. Donc

Si, par le foyer F′ *d'une ellipse* E, *on mène une transversale* AA′, *terminée aux tangentes à l'extrémité du grand axe, la circonférence* C, *décrite sur* AA′ *comme diamètre, est doublement tangente à l'ellipse : la corde de contact est parallèle au grand axe.*

En outre, *pour une même circonférence* C, *l'angle* F′MT *est constant* (fig. 3).

IX. Par rapport à la circonférence C, F′ est un point quelconque. Conséquemment, *si le sommet* A *d'un angle donné parcourt une circonférence* ACB, *et qu'un de ses côtés passe par un point fixe* F, *le second côté enveloppe une conique, dont l'un des foyers est le point fixe.* En même temps, *le lieu des projections de* F *sur* AB *est une circonférence.*

Fig. 5.



(*) Pour que les points G, H existent, le coefficient k ne doit pas être inférieur à $\frac{b}{c}$. Si $k = \frac{b}{c}$, la circonférence (C) est osculatrice, en B′, à l'ellipse, etc.

X. L'angle A étant donné, la corde BC a une longueur constante : elle est tangente à une circonférence *abc*, concentrique à la première. On peut donc résumer ainsi les derniers théorèmes :

Si un triangle ABC, *inscrit à une circonférence donnée, a un côté* AC *passant par un point fixe* F, *et un deuxième côté tangent à une seconde circonférence* abc, *concentrique à la première :* 1° *le troisième côté enveloppe une conique dont* F *est un foyer* (*); 2° *cette conique est doublement tangente à la circonférence* ABC; 3° *le lieu des projections de* F, *sur* AB, *est la circonférence décrite sur l'axe focal de la conique, pris comme diamètre;* 4° *si l'on mène* FM *coupant* AB *sous un angle constant, le lieu du point* M *est une circonférence* C, *doublement tangente à la conique;* 5° *toutes les circonférences* C *ont leurs centres situés sur le second axe de cette courbe.*

XI. Nous terminerons cette Note, déjà bien longue, par l'énoncé d'une propriété de l'ellipse, et par l'application que l'on en peut faire à un problème de calcul intégral :

Soit MN *la normale en un point* M *de l'ellipse; soit* N *le point où cette droite rencontre le petit axe. Si* F *est l'un des deux foyers, on a*

$$\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{NF}} = \frac{a}{c}.$$

Cela posé, proposons-nous le problème suivant :

Trouver une courbe telle que la longueur MN, *de la normale en* M, *soit à la distance comprise entre le pied* N *de cette droite et un point fixe* F, *dans un rapport donné* k.

L'équation différentielle du problème est, si l'on désigne par c la distance du point F à l'axe des abscisses :

$$(k^2x^2 + c^2k^2 - y^2)\,dx^2 + 2k^2xy\,dx\,dy + (k^2 - 1)\,y^2dy^2 = 0.$$

(*) Poncelet, *Propriétés projectives*, t. I, p. 249.

Il résulte, de la propriété énoncée, que l'*intégrale générale* de cette équation est

$$y^2 + (x - \alpha)^2 = k^2(\alpha^2 + c^2),$$

et que la *solution singulière* est

$$k^2x^2 + (k^2 - 1)\,y^2 = c^2k^2(k^2 - 1).$$

Ainsi, les courbes demandées sont des circonférences ayant pour enveloppe une conique.

XII. Plus généralement, soit à intégrer l'équation

$$(ax^2 + by^2 + c)\,dy^2 + 2fxydxdy + gx^2dx^2 = 0.$$

On peut l'écrire ainsi :

$$\left[agx^2 + (bg - f^2)\,y^2 + cg\right]dy^2 + (fydy + gxdx)^2 = 0;$$

ou encore sous cette autre forme :

$$dy = \frac{fydy + gxdx}{\sqrt{(f^2 - bg)\,y^2 - agx^2 - cg}}.$$

Le second membre est une différentielle exacte, si

$$f^2 - bg = -af.$$

Donc, dans ce cas, l'intégrale générale est

$$a^2(y - \beta)^2 + afy^2 + agx^2 + cg = 0.$$

Cette équation représente une infinité de coniques semblables, ayant leurs centres sur l'axe des ordonnées.

(Juillet 1875.) E. Catalan.