Article
Sur la transformation des équations.
in: Nouvelle correspondance mathématique | Nouvelle correspondance mathématique - 2 | Sur les courbes unicursales, considérées comme des cissoides. Sur le cal...

Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library
For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek
Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Purchase a CD-ROM

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:
Niedersaechisische Staats- und Universitaetsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen, Germany, Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Le tour même de la démonstration montre qu'on peut, à l'infini, formuler des propositions analogues (*).

LAISANT.

SUR LA TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS (**).

1. PROBLÈME I. *Transformer l'équation*

$$x^3 + A_1x + A_2x + A_3 = 0, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

en

$$y^3 + B_3 = 0 \text{ (***)} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Posons

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

α, β, γ étant des *paramètres*. A chaque valeur de x correspond une valeur de y; ainsi, tant que les trois paramètres restent arbitraires, la *transformée* est

$$y^3 + B_1y^2 + B_2y + B_3 = 0. \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

(*) *Exemples :*

$$1 + 6^x = \mathcal{M}.7, \quad si \quad x = \mathcal{M}.3 \quad ou \quad \mathcal{M}.3+1;$$

$$1 + 10^x + 100^x = \mathcal{M}.3;$$

$$1 + 10^x + 100^x = \mathcal{M}.7, \quad si \quad x = 2, 4, 8, 10, 14, 16, \ldots;$$

etc. (E. C.)

(**) A propos de la *Question* 60 (*N. C.*, tome I, p. 208), un Abonné nous a demandé de faire connaître la démonstration du Théorème de Jerrard. C'est ce que nous faisons dans cette Note, empruntée, en partie, à l'*Algèbre supérieure* de M. Serret.

(***) Souvent, ce problème est ainsi énoncé : *faire disparaître le deuxième terme et le troisième terme de la proposée.*

On a, sous forme abrégée :

$$B_1 = -\sum y, \quad B_2 = \sum yy' ;$$

ou, d'après la formule (3) :

$$-B_1 = \alpha \sum x^2 + \beta \sum x + 3\gamma, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$B_2 = \sum (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)(\alpha x'^2 + \beta x' + \gamma)$$

$$= \alpha^2 \sum x^2 x'^2 + \alpha \left[\beta \sum x^2 x' + 2\gamma \sum x^2\right] + \beta^2 \sum xx' + 2\beta\gamma \sum x + 3\gamma^2. \quad (6)$$

On sait que les *fonctions symétriques* des racines de la proposée :

$$\sum x, \quad \sum x^2, \quad \sum xx', \quad \sum x^2 x'^2, \quad \sum x^2 x', \ldots$$

s'expriment, *rationnellement*, au moyen des coefficients A_1, A_2, A_3. Nous pouvons donc remplacer les deux dernières formules par celles-ci :

$$-B_1 = F\alpha + G\beta + H\gamma, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$B_2 = M\alpha^2 + N\alpha + P, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

dans lesquelles F, G, H, M étant des quantités connues (*), N et P représentent des polynômes *homogènes* en β, γ, l'un du premier degré, l'autre du second.

Si nous voulons que la transformée (3) se réduise à la forme indiquée (2), nous devons disposer des *inconnues* α, β, γ, de manière à satisfaire aux conditions

$$F\alpha + G\beta + H\gamma = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$M\alpha^2 + N\alpha + P = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

L'élimination de α conduit à une équation homogène, de la forme

$$R\beta^2 + S\beta\gamma + T\gamma^2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

qui détermine le rapport $\frac{\beta}{\gamma}$. Ainsi, γ *reste arbitraire.*

(*) $F = A_1^2 - 2A_2$, $G = -A$, $\gamma = 3$, etc.

2. Remarque. Si l'on veut que la transformée ait la forme *normale*

$$y^3 + py + q = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

on doit seulement se donner la condition (7) : le problème est *doublement indéterminé.*

3. Exemple :

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

$$\sum x = 6, \quad \sum x^2 = 36 - 22 = 14.$$

L'équation (7) devient

$$14\alpha + 6\beta + 3\gamma = 0.$$

On y satisfait par

$$\alpha = 3, \quad \beta = -6, \quad \gamma = -2;$$

donc, en particulier,

$$y = 3x^2 - 6x - 2.$$

En effet, les valeurs de x étant $1, 2, 3$, celles de y sont

$$3 - 6 - 2 = -5, \quad 12 - 12 - 2 = -2, \quad 27 - 18 - 2 = 7;$$

d'où l'on conclut la transformée :

$$y^3 - 39y - 70 = 0.$$

4. Problème II. *Transformer l'équation*

$$x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

en

$$y^4 + B_3y + B_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

La formule (3) est encore applicable; les valeurs (5), (6) deviennent, comme on le reconnaît sans difficulté :

$$-B_1 = \alpha \sum x^2 + \beta \sum x + 4\gamma, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

$$B_2 = \alpha^2 \sum x^2 x'^2 + \alpha \left[\beta \sum x^2 x' + 3\gamma \sum x^2\right] + \beta^2 \sum x x' + 3\beta\gamma \sum x + 6\gamma^2;$$

et les calculs précédents ne subissent pas de modification essentielle.

5. Exemple :

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0.$$

On trouve

$$\sum x = 5, \quad \sum x x' = 5, \quad \sum x^2 = 15, \quad \sum x^2 x'^2 = 63, \quad \sum x^2 x' = 40;$$

puis

$$15\alpha + 5\beta + 4\gamma = 0, \quad 63\alpha^2 + 5(8\beta + 9\gamma)\alpha + 5\beta^2 + 15\beta\gamma + 6\gamma^2 = 0.$$

L'élimination de α conduit à l'équation homogène

$$21(5\beta + 4\gamma)^2 - 25(5\beta + 4\gamma)(8\beta + 9\gamma) + 75(5\beta^2 + 15\beta\gamma + 6\gamma^2) = 0,$$

ou

$$100\beta^2 - 40\beta\gamma + 114\gamma^2 = 0.$$

Cette équation est vérifiée par

$$\gamma = 1, \quad \beta = \frac{2 + \sqrt{-110}}{10};$$

valeurs d'où résulte

$$\alpha = -\left(\frac{4}{15} + \frac{1}{3}\beta\right).$$

Les racines de la proposée étant, comme on peut le vérifier :

$$x = 1, \quad x' = 2, \quad x'' = 3, \quad x''' = -1,$$

celles de la transformée sont

$$y = \frac{11}{15} + \frac{2}{3}\beta, \quad y' = -\frac{1}{15} + \frac{2}{3}\beta, \quad y'' = -\frac{7}{5}, \quad y''' = \frac{11}{15} - \frac{4}{3}\beta.$$

Parmi ces valeurs, *une seule est réelle*. De plus,

$$\sum y = 0;$$

$$\sum yy' = -\frac{7}{5}\left(\frac{7}{5}\right) + \frac{2}{5}\left(\frac{11}{15} + \frac{2}{3}\beta\right)\left(1-\beta\right) - \left(\frac{1}{15} - \frac{2}{3}\beta\right)\left(\frac{11}{15} - \frac{4}{5}\beta\right)$$

$$= -\frac{38}{25} + \frac{8}{15}\beta - \frac{4}{5}\beta^2 = -\frac{1}{75}(114 - 40\beta + 100\beta^2) = 0;$$

etc.

6. PROBLÈME III. *Transformer l'équation*

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1}x + A_m = 0, \quad . \quad . \quad (16)$$

en

$$y^m + B_4 y^{m-4} + B_5 y^{m-5} + \cdots + B_m = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

m *étant supérieur à* 4.

Par analogie avec les solutions des deux premiers problèmes, nous prendrons

$$y = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon \text{ (*)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Tant que les coefficients α, β, ... restent arbitraires, l'équation en y a la forme générale

$$y^m + B_1 y^{m-1} + B_2 y^{m-2} + B_3 y^{m-3} + B_4 y^{m-4} + \cdots + B_m = 0. \quad (19)$$

Dans cette équation (19) :

$$-B_1 = \sum y, \quad B_2 = \sum yy', \quad -B_3 = \sum yy'y''.$$

D'après la relation (18) et les considérations employées dans le

(*) On verra, plus loin, pourquoi il est utile d'introduire cinq paramètres. Du reste, la formule (16) est un cas particulier de celle-ci :

$$y = \alpha x^p + \beta x^{p-1} + \gamma x^{p-2} + \cdots + \lambda x + \mu,$$

imaginée par le célèbre Géomètre Tschirnhausen (né en 1651, mort vers 1708).

Problème I, les conditions $B_1 = 0$, $B_2 = 0$, $B_3 = 0$ se transforment en celles-ci :

$$\alpha + P_1 = 0, \quad \alpha^2 + \alpha P_2 + Q_2 = 0, \quad \alpha^3 + \alpha^2 P_3 + \alpha Q_3 + R_3 = 0.$$

Dans ces nouvelles équations, $P_1, P_2, P_3, Q_2, Q_3, R_3$ sont des polynômes *homogènes;* les trois premiers, du premier degré; les deux suivants, du deuxième degré; le dernier, du troisième degré.

L'élimination de α donne, pour déterminer β, γ, δ, ε:

$$P_1^2 - P_1 P_2 + Q_2 = 0, \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

$$P_1^3 - P_1^2 P_3 + P_1 Q_3 - R_3 = 0. \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

L'équation (20) est *homogène, du deuxième degré;* l'équation (21) est également *homogène*, mais *du troisième degré.* Si, entre ces deux équations, on voulait éliminer une des inconnues, β par exemple, on serait conduit à une équation *finale, homogène,* mais du *sixième degré.* Voici comment M. *Jerrard* a évité cette inutile complication.

7. On sait que tout polynôme homogène, du second degré, contenant n variables, est généralement décomposable en une somme *algébrique* de carrés, dont le nombre ne surpasse pas n. Le premier membre de l'équation (20) peut donc être transformé ainsi :

$$f^2 \pm g^2 \pm h^2 \pm k^2;$$

f, g, h, k renfermant, sous forme homogène, et *au premier degré* seulement, les inconnues β, γ, δ, ε (*). Conséquemment, cette

(*) On peut supposer que f contient *une* inconnue; que g en contient *deux*, etc. Mais ces hypothèses sont indifférentes au succès de la méthode.

équation (20) peut, suivant les cas, être remplacée par un des systèmes suivants :

$$f+g\sqrt{-1}=0,\quad h+k\sqrt{-1}=0;$$
$$f+g\sqrt{-1}=0,\quad h+k=0;$$
$$f+g=0,\qquad h+k=0;$$
. . . .

Pour fixer les idées, considérons celui-ci :

$$f+g\sqrt{-1}=0,\quad h+k\sqrt{-1}=0. \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

De ces deux équations du *premier degré*, on tirera β et γ en fonction de δ et de ε ; après quoi la substitution dans l'équation (21) transformera celle-ci en une *équation du troisième degré, par rapport à* $\frac{\delta}{\varepsilon}$. On arrive donc à cette conclusion :

8. *Au moyen de la résolution d'une seule équation du troisième degré, on peut faire disparaître le deuxième terme, le troisième terme et le quatrième terme d'une équation donnée :*

$$x^m+A_1x^{m-1}+\cdots+A_m=0.$$

En particulier, toute équation du cinquième degré est réductible à la forme

$$y^5+py+q=0.$$

Ce sont là les *Théorèmes de M. Jerrard.*

9. *Remarque.* Si l'on avait pris, au lieu de la formule (18),

$$y=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18')$$

l'équation (20), en β, γ, δ, eût été réductible à la forme

$$f^2\pm g^2\pm h^2=0.$$

Si l'on essaie de satisfaire à celle-ci, en posant, par exemple :

$$f+g\sqrt{-1}=0,\quad h=0,$$

on voit qu'il résulte, de ce calcul, *trois équations* renfermant, comme inconnues, $\frac{\beta}{\delta}$ et $\frac{\gamma}{\delta}$. La formule (18′) n'est donc pas applicable (**6**).

10. *Autre remarque.* Si les paramètres α, β, γ, δ, ε sont réels, à chaque valeur réelle de x correspond une valeur réelle de y. En outre, les coefficients de la proposée étant supposés réels, il en serait de même pour les coefficients de la transformée. Mais, d'après la forme des équations (22), on voit que *certains de ces paramètres peuvent être imaginaires.* Les conclusions précédentes ne sont donc pas nécessaires : la transformée peut avoir des coefficients imaginaires. Conséquemment, le Théorème de Descartes n'est pas applicable à cette transformée (*).

E. Catalan.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. Glaisher. — « J'ai trouvé que l'équation

$$2^{2n+1}\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} e^{\sqrt{x}}=e^{\sqrt{x}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

(*N. C. M.*, t. II, p. 241) est un cas particulier de la suivante :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \varphi(\sqrt{x})=\frac{1}{2^{2n+1}}\varphi^{(2n+1)}(\sqrt{x}),$$

où $\varphi^r(u)$ est la $r^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction $\varphi(u)$ quelconque.

Quand on remplace $\sqrt{x}$ par $\sqrt[3]{x}$, on trouve

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{n+\frac{1}{3}}\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{n+\frac{1}{3}}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \varphi(\sqrt[3]{x})=\frac{1}{3^{3n+1}}\varphi^{(3n+1)}(\sqrt[3]{x}).$$

En général, l'équation analogue en $\sqrt[r]{x}$ est :

$$\left\{\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{n+\frac{1}{r}}\right\}^{r-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \varphi(\sqrt[r]{x})=\frac{1}{r^{rn+1}}\varphi^{(rn+1)}(\sqrt[r]{x}).$$

(*) Ceci répond, nous semble-t-il, à la *Question* 60.