a un point multiple d'ordre $(p-1)$ à l'origine et p asymptotes, parallèles à la droite qui a pour équation $y - t_1 x = 0$. Elle est la limite de la courbe d'ordre p, dont les équations sont

$$y = tx, \quad x = \frac{A_1}{t - t_1} + \cdots + \frac{A_p}{t - t_2},$$

laquelle a aussi, à l'origine, un point multiple d'ordre $(p-1)$, mais dont les asymptotes ne sont pas parallèles.

IV. S'il y a, au dénominateur de x, des facteurs multiples imaginaires, on devra, comme dans le second cas, réunir deux à deux les fractions rationnelles simples conjuguées. On peut encore, dans un certain sens, regarder ce cas comme la limite de celui où les facteurs sont inégaux.

SUR LE CALCUL SYMBOLIQUE DES NOMBRES DE BERNOULLI;

par M. ÉDOUARD LUCAS, professeur au Lycée Charlemagne.

I

Considérons, en général, une fonction

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x),$$

ordonnée suivant les puissances de x, et égale à la différence première d'une fonction $f(x)$, pour une différence de l'argument égale à l'unité. Soit, par exemple,

$$\Delta f(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + \cdots + Lx^0.$$

Remplaçons, successivement, x par $1, 2, 3, \ldots, (x-1)$, et ajoutons; nous obtenons

$$f(x) - f(1) = AS_m + BS_{m-1} + \cdots + LS_0,$$

ou encore la formule symbolique

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \Delta f(S) = f(x) - f(1),$$

dans laquelle nous devons remplacer les exposants de S par des indices: S_m désigne la somme des puissances m des $(x-1)$ premiers nombres entiers. De plus,

$$S_0 = x - 1.$$

Si l'on suppose, en particulier, $f(x)$ successivement égale à

$$x^n, \quad (x \pm 1)^n, \quad (x \pm 2)^n, \ldots,$$

on trouve un grand nombre de formules nouvelles. On a, par exemple, les relations suivantes :

$$(S+1)^n - S^n = x^n - 1,$$
$$S^n - (S-1)^n = (x-1)^n;$$

puis, par addition et soustraction :

$$(S+1)^n + (S-1)^n = x^n + (x-1)^n - 1,$$
$$(S+1)^n + (S-1)^n - 2S^n = x^n - (x-1)^n - 1.$$

En faisant $f(x) = (x - \frac{1}{2})^n$, on a encore la formule

$$(2S+1)^n - (2S-1)^n = (2x-1)^n - 1,$$

donnée par M. Gilbert, au moyen de l'Analyse infinitésimale (*).

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. VIII, 1869, p. 437.

Des formules précédentes, il résulte que S_{2n} et S_{2n+1} sont divisibles, algébriquement, par S_2, S_3 ou S_1^2, et que S_n est une fonction *paire* ou *impaire* de $(x - \frac{1}{2})$, suivant que n est *impair* ou *pair*.

II

En désignant par T_m la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$, des $(x-1)$ premiers nombres impairs, on déduit, du développement de $(2x-1)^m$, en y remplaçant x par $1, 2, 3, \ldots, (x-1)$, et faisant la somme des résultats :

$$T_m = (2S - 1)^m.$$

Au contraire, du développement de $(2x+1)^m$, en y remplaçant $2x$ par $1, 3, 5, \ldots, (2x-3)$, et faisant la somme des résultats, on conclut

$$(2S)^m = (T-1)^m.$$

Les formules précédentes nous prouvent l'équivalence des symboles $2S$ et $T+1$, dans les transformations des équations algébriques. On a ainsi, au moyen de l'équation (1), en changeant $f(x)$ en $\varphi(x-1)$, et S en $\frac{T+1}{2}$, la relation

$$\varphi\left(\frac{T+1}{2}\right) - \varphi\left(\frac{T-1}{2}\right) = \varphi(x-1) - \varphi(0).$$

III

On peut poser l'égalité symbolique

$$nS_{n-1} = (x+B)^n - B^n,$$

dans laquelle on remplacera les exposants de B par des indices : les coefficients B_r sont déterminés par la condition que le premier membre augmente de nx^{n-1}, quand on change x en $(x+1)$, dans le second. Donc, quelle que soit la valeur de x :

$$nx^{n-1} = (x+B+1)^n - (x+B)^n.$$

Il résulte, des formules précédentes, que les coefficients B_r demeurent invariables, lorsque l'on change l'indice de S, sans changer celui de B. On trouve

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_{2n+1} = 0, \ldots$$

Ces coefficients sont les *Nombres de Bernoulli,* du nom de Jacques Bernoulli, qui, le premier, les a introduits dans l'Analyse. A cause de la simplification des résultats, nous avons modifié les deux notations employées habituellement. Pour retrouver la notation de Lacroix, conservée par M. Catalan, dans un grand nombre de Mémoires, il faut diminuer d'une unité les indices, et ne pas tenir compte de $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$.

On retrouve les formules ordinaires, qui servent au calcul des coefficients B_r, en faisant x égal à ± 1, ± 2, $\pm \frac{1}{2}$, etc. On a encore

$$\frac{dS_n}{dx} = nS_{n-1} + B_n;$$

par conséquent, $\frac{S_n}{x}$ est égal à B_n pour $x = 0$. Enfin, on obtient la somme des puissances semblables des x premiers nombres, en changeant B_1 en $-B_1$.

IV

On trouve la somme des puissances semblables des $(x - 1)$ premiers nombres impairs, au moyen de la remarque suivante :

La somme des m$^{\text{ièmes}}$ *puissances des* 2x *premiers nombres entiers, est égale à la somme des* m$^{\text{ièmes}}$ *puissances des* x *premiers nombres impairs, augmentée du produit,* par 2^m, *de la somme des mêmes puissances des* x *premiers nombres entiers.*

Donc, en désignant maintenant par T_n la somme des $n^{\text{ièmes}}$ puissances des x premiers nombres impairs, on a

$$nT_{n-1} = (2x + B)^n - B^n - 2^{n-1}\left[(x + B)^n - B^n\right],$$

ou bien

$$nT_{n-1} = (2x + C)^n - C^n;$$

les coefficients C_r étant donnés par la formule

$$C_n = B_n(1 - 2^{n-1}).$$

On peut aussi exprimer les sommes T_n, en fonction du dernier nombre impair.

V

Si l'on désigne par U_x et V_x les sommes des x premiers termes des séries dont les termes généraux sont u_x et v_x, on a (*)

$$U_xV_x - \sum_{p=1}^{p=x}[u_pV_p + v_pU_p] + \sum_{p=1}^{p=x} u_pv_p = 0.$$

Si l'on fait $u_x = x_m$ et $v_x = x_n$, on obtient la formule symbolique

$$(3)\quad S_mS_n + S_{m+n} = S^m\frac{(S+B)^{n+1} - B^{n+1}}{n+1} + S^n\frac{(S+B)^{m+1} - B^{m+1}}{m+1},$$

dans laquelle $B_1 = +\frac{1}{2}$. En divisant par x, et faisant ensuite x égal à zéro, on a la relation

$$(4)\quad B_{m+n} = B^m\frac{(B+\beta)^{n+1} - \beta^{n+1}}{n+1} + B^n\frac{(B+\beta)^{m+1} - \beta^{m+1}}{m+1},$$

dans laquelle on remplacera, après le développement, les puissances de B et de β par des indices, et ensuite β_r par B_r. Les formules de MM. Worontzoff et Le Paige (**) se déduisent de la précédente, en faisant $m = 0$.

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIV, 1875; p. 487.

(**) *Nouvelles Annales*, janvier 1876, p. 16; *Nouvelle Correspondance*, avril 1876, p. 127.

VI

Divisons par x les deux membres de la formule fondamentale

$$f(\mathrm{S}+1)-f(\mathrm{S})=f'(x)-f'(1),$$

et faisons ensuite $x=0$: nous trouvons, en tenant compte des résultats du § III :

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad f(\mathrm{B}+1)-f(\mathrm{B})=f'(0);$$

ou, plus généralement, en posant $f(x)=\varphi(x+z)$:

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad \varphi(\mathrm{B}+1+z)-\varphi(\mathrm{B}+z)=\varphi'(z).$$

Nous pouvons obtenir, au moyen de cette formule, toutes celles qui servent au calcul des Nombres de Bernoulli, et en découvrir de nouvelles.

1° Si $f(x)=e^{xz}$, on a

$$e^{(\mathrm{B}+1)z}-e^{\mathrm{B}z}=z;$$

et, par suite,

$$\frac{z}{e^z-1}=e^{\mathrm{B}z}.$$

2° Si $f(x)=\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)z$, on a

$$\sin\left(\mathrm{B}+\frac{1}{2}\right)z-\sin\left(\mathrm{B}-\frac{1}{2}\right)z=z\cos\frac{z}{2};$$

ou, plus simplement,

$$\frac{z}{2}\operatorname{cotg}\frac{z}{2}=\cos\mathrm{B}z.$$

3° Si l'on pose $f(x)=\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)z$, on trouve

$$-\frac{z}{2}=\sin\mathrm{B}z.$$

4° Soit

$$f(x) = (x + z)(x + z + 1) \dots (x + z + n).$$

On a, symboliquement,

$$\frac{B + z + 1}{z} \cdot \frac{B + z + 2}{z + 1} \cdots \frac{B + z + n}{z + n - n} = \frac{z + n}{n + 1}\left[\frac{1}{z} + \frac{1}{z + 1} + \cdots + \frac{1}{z + n}\right];$$

et, pour $z = 1$:

$$\frac{B + 2}{1} \cdot \frac{B + 3}{2} \cdots \frac{B + n}{n - 1} = \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{n},$$

En se servant de l'élégante formule

$$\frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n + 2} + \cdots + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n},$$

due à M. Catalan (*), on peut exprimer le second membre de celle-ci, en fonction des Nombres de Bernoulli. On a ainsi,

$$\frac{B + n + 2}{n + 1} \cdot \frac{B + n + 3}{n + 2} \cdots \frac{B + 2n}{2n - 1} = 2\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n}\right].$$

VII

L'identité

$$-\operatorname{tg}\frac{z}{2} = 2\operatorname{cotg} z - \operatorname{cotg}\frac{z}{2},$$

nous donne, en remplaçant $\cot z$ et $\cot \frac{z}{2}$ par leurs valeurs :

$$-z \operatorname{tg}\frac{z}{2} = 2\left[\cos 2Bz - \cos Bz\right].$$

(*) *Note sur une formule de M. Botesu* (Bulletins de l'Académie de Belgique, 1872).

Posant

$$P_n = 2\,[2^n - 1]\,B_n,$$

nous obtenons

$$- z \operatorname{tg} \frac{z}{2} = \cos Pz,$$

en ayant soin de remplacer P^0 par 0. M. CATALAN (*) a fait remarquer l'importance des coefficients P_n, *entiers et impairs,* considérés par EULER, et dont le calcul est préférable à celui des nombres bernoulliens. En retranchant, membre à membre, les identités

$$(2B + 1)^{2n+1} = (2B)^{2n+1},$$

$$(B + 1)^{2n+1} = (B)^{2n+1},$$

on trouve la relation de récurrence

$$(P + 1)^{2n+1} = 0.$$

Mais on a, plus généralement, la formule

$$(7) \quad f(P + z + 1) - f(P + z - 1) = 2\,[f'(z - 1) - f'(z)];$$

et, en faisant $f(x) = (x - 1)^n$:

$$(P + 1)^n - (P - 1)^n = 2n\,(-1)^{n-1}.$$

On déduit immédiatement, de cette relation, que P_{2n} *est entier impair,* et que $P_{2n+1} = 0$. De plus,

$$P_0 = 0,\ P_1 = -1,\ P_2 = 1,\ P_4 = -5,\ P_8 = +17,\ P_{10} = -155, \ldots$$

L'équation (7) donne, pour $z = 1$,

$$f(P + 2) - f(P) = 2\,[f'(0) - f'(1)].$$

(*) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris,* t. LIV, p. 1031. *Mémoires de l'Académie royale de Belgique,* t. XXXVII.

Faisons, successivement, $f(x)$ égale à e^{xz}, $\sin(x-1)z$, $\cos(x-1)z$, ...; nous obtenons

$$e^{Pz} = 2z\frac{e^z-1}{1-e^{2z}},\quad \cos Pz = -z\,\mathrm{tg}\,\frac{z}{2},\quad \sin Pz = -z.$$

Soit enfin

$$f(x) = (x+z+1)(x+z+3)\dots(x+z+2n-1):$$

il vient

$$n(P+z+3)(P+z+5)\dots(P+z+2n-1)$$

$$= (z+1)(z+3)\dots(z+2n-1)\left[\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+3}+\dots+\frac{1}{z+2n-1}\right]$$

$$-(z+2)(z+4)\dots(z+2n)\left[\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z+4}+\dots+\frac{1}{z+2n}\right].$$

Nous espérons donner, dans un prochain travail, l'application du calcul symbolique aux fonctions de plusieurs variables, et aux relations contenant les produits 2 à 2, 3 à 3, ... p à p des nombres B et P.

Note du Rédacteur. — Parmi les nombreuses relations démontrées ou indiquées dans le Mémoire de M. Lucas, l'une des plus remarquables nous paraît être celle qui termine le paragraphe VI :

$$\frac{B+n+2}{n+1}\cdot\frac{B+n+3}{n+2}\cdots\frac{B+2n}{2n-1} = 2\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots-\frac{1}{2n}\right]. \quad (A)$$

Au moyen d'une propriété des *intégrales eulériennes* (*), on peut,

---

(*) *Mélanges mathématiques*, p. 151.

après avoir remplacé B par x, écrire ainsi le premier membre :

$$1+\frac{n-1}{n+1}\,\frac{x+1}{1}+\frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)}\,\frac{(x+1)x}{1.2}$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}\,\frac{(x+1)x(x-1)}{1.2.3}+\cdots. \quad \text{(B)}$$

Tant que le nombre entier n est *fini*, la fonction (B) est un polynôme entier, dont les termes, à partir du deuxième, sont respectivement inférieurs à

$$\frac{x+1}{1},\quad \frac{(x+1)x}{1.2},\quad \frac{(x+1)x(x-1)}{1.2.3},\ \ldots$$

En même temps, d'après la convention expliquée par notre honorable et ingénieux Collaborateur, les dernières fractions deviennent :

$$\frac{B_1+1}{1},\quad \frac{B_2+B_1}{1.2},\quad \frac{B_3-B_1}{1.2.3},\quad \ldots;$$

de manière que les coefficients B_1, B_2, B_3, ... sont déterminés par les équations :

$$1+\frac{1}{3}\,\frac{B_1+1}{1}=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right),$$

$$1+\frac{2}{4}\,\frac{B_1+1}{1}+\frac{2.1}{4.5}\,\frac{B_2+B_1}{1.2}=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right),$$

. . . .

Mais, *si l'on fait croître* n *indéfiniment*, une circonstance singulière se présente : la fonction (B), si l'on y regarde x comme une *constante positive*, tend vers

$$1+\frac{x+1}{1}+\frac{(x+1)x}{1.2}+\frac{(x+1)x(x-1)}{1.2.3}+\cdots,$$

c'est-à-dire 2^{x+1}. Cette exponentielle a pour développement, si l'on veut,

$$2\left[1+\frac{xl2}{1}+\frac{x^2(l2)^2}{1.2}+\frac{x^3(l.2)^3}{1.2.3}+\cdots\right]$$

Et comme le second membre de l'égalité (A) a pour limite $2l2$, on peut être tenté de conclure ainsi :

$$1+\frac{B_1}{1}l2+\frac{B_2}{1.2}(l2)^2+\frac{B_3}{1.2.3}(l2)^3+\cdots=l2. \quad . \quad . \quad (C)$$

Malheureusement, cette curieuse égalité est *absurde*, attendu la divergence de la série contenue dans le premier membre (*).

CAS REMARQUABLE D'INÉGALITÉ DE DEUX TRIANGLES;

par M. l'abbé GELIN, professeur au collége de St-Quirin, à Huy.

Purgotti, professeur à l'Université de Pérouse, a remarqué le premier, dans ses *Elementi di Geometria*, que *deux triangles peuvent, sans être égaux, avoir deux côtés égaux et les trois angles égaux, chacun à chacun.*

I

Si ces triangles sont possibles, les côtés égaux seront opposés aux angles non égaux. Et puisqu'ils sont semblables, on aura,

(*) Nous reviendrons, dans un autre moment, sur la relation

$$lim\left[\frac{n+2+x}{n+1}\cdot\frac{n+3+x}{n+2}\cdots\frac{2n+x}{2n-1}\right]=2^{1+x}.$$