REMARQUE. — Le problème précédent dépend d'une équation de la forme

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\beta - \frac{1}{\beta}\right) = u^2, \tag{10}$$

où α, β, u doivent être rationnels. Comme nous avons posé

$$\alpha^2+\beta^2 = 4, \quad Z+y = \alpha x, \quad Y+z = \beta x,$$

les formules trouvées établissent, entre les arêtes du tétraèdre, cette nouvelle relation

$$(Z+y)^2 + (Y+z)^2 = 4x^2\,;$$

par conséquent, elles ne donnent pas toutes les solutions possibles.

Pour résoudre l'équation (10), Euler [1] emploie les deux substitutions

$$\alpha = t(\beta-1)+1, \quad \alpha = \frac{t\beta+1}{t+\beta},$$

t étant une indéterminée ; puis il ramène la question à rendre carré parfait un polynôme du quatrième degré en β.

J. NEUBERG.

SUR LES ASYMPTOTES DES COURBES ALGÉBRIQUES.

1. LEMME. Soit F (x, λ) = 0 *une équation algébrique, du degré* m *par rapport à* x. *Soit, pour* $\lambda = \alpha$, n *le nombre des racines réelles :* m—n *est un nombre pair.*

En effet, $m-n$ est le nombre des valeurs imaginaires de x, répondant à $\lambda=\alpha$.

2. REMARQUE. L'énoncé et la démonstration supposent que *le coefficient de* x^m *ne s'annule pas pour* $\lambda = \alpha$. En outre, pour plus de simplicité, nous admettons que les valeurs réelles de x, répondant à $\lambda = \alpha$, sont *inégales*.

---

(1) *Algèbre d'Euler*, t. II, n° 238.

3. Corollaire I. *Si, pour* $\lambda = \alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$, *l'équation* $F(x, \lambda) = 0$ *a* $n, n', n'', \ldots$ *racines réelles, les nombres* $n, n', n'', \ldots$ *sont de même parité.*

4. Corollaire II. *Si une courbe algébrique est rencontrée, en* $p, p', p'', \ldots$ *points, par des droites* $d, d', d'', \ldots$ *parallèles entre elles, les nombres* $p, p', p'', \ldots$ *sont de même parité.*

5. Corollaire III. *Les courbes algébriques n'ont pas de point d'arrêt.*

Supposons qu'un arc AB se termine brusquement en A. Menons, de part et d'autre du *point d'arrêt* A, deux parallèles d, d', infiniment voisines de ce point. Si la droite d, qui coupe AB, a p points communs avec la courbe, la droite d' n'en a que $p-1$. Donc la courbe considérée n'est pas algébrique.

6. Remarque. Soit une ligne plane quelconque, trajectoire d'un point M qui s'arrête après être revenu à sa position initiale A (1) : *le nombre des points d'intersection de cette ligne avec une transversale quelconque, rectiligne ou curviligne, est pair.*

En effet, si la transversale rencontre la courbe aux trois points A, B, C, par exemple ; les arcs AA′, CC′, situés *de part et d'autre* de la transversale, donnent lieu, en se réunissant, à un *quatrième* point d'intersection (2).

7. Remarque. La dernière proposition paraît en défaut dans ce problème, bien connu des écoliers : *tracer, d'un seul coup de crayon, les côtés et l'une des diagonales d'un rectangle* ABCD. Mais, si A est la position initiale du curseur, celui-ci, après avoir décrit la diagonale AC, doit, d'après l'hypothèse (6), revenir en A : cette condition entraîne la construction d'une nouvelle ligne CEA, allant de C en A.

8. Des branches infinies. Si un point M, parti de la position A, décrit une ligne ABCD, de manière que la distance *rectiligne* AM puisse croître au-delà de toute limite, nous dirons que la trajectoire ABCD a *une branche infinie.*

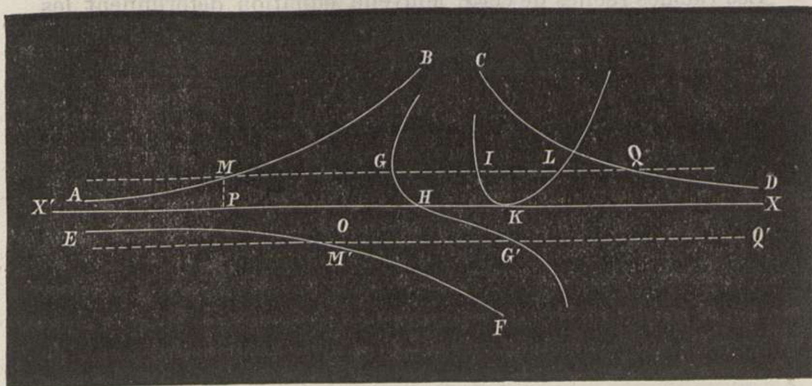
---

(1) Cette ligne est un *trait de plume, une toile d'araignée*, etc.

(2) Ce raisonnement est celui dont on fait usage pour établir, par la Géométrie, les théorèmes sur l'*existence des racines réelles.*

9. Remarque. D'après cette définition, un seul arc continu, indéfini dans les deux sens, est considéré comme composé de *deux branches* infinies. Par exemple, *l'hyperbole ordinaire a quatre branches infinies ; la ligne droite a deux branches infinies ; etc.* [1].

10. Théorème. *Dans toute courbe algébrique, le nombre des branches infinies* [2], *asymptotiques à une même droite, est pair.*



Soit $F(x, y) = 0$ l'équation de la courbe, rapportée à l'asymptote X'OX, prise comme axe des abscisses : $F(x, y)$ est un polynôme entier. Soient $y = \pm \varepsilon$ les équations de deux droites MQ, M'Q', parallèles à X'X : ces transversales rencontrent la courbe en divers points M, G, I, L, Q,..., M', G',... Soient M, Q,... M', ... les points qui s'éloignent indéfiniment de l'origine O et se rapprochent indéfiniment de X'X, lorsque ε tend vers zéro. Pour exprimer cette circonstance, nous dirons que *les points* M, Q,... M' *se transportent à l'infini*, ou que *chacune des branches*

---

(1) Pour éviter toute confusion, on pourrait reprendre les dénominations de *bras* ou de *rameaux*, employées par les anciens Géomètres. C'est ce qu'a fait M. de La Gournerie : « *chaque branche* (infinie) *est formée de deux* BRAS... » (*Traité de Géométrie descriptive*, 91).

(2) Ou plutôt : *des bras*.

infinies rencontre l'asymptote en un point situé à l'infini (¹).

Cela posé, il s'agit de démontrer que le nombre des points M, Q,... M', est *pair*.

Soient n, n' les nombres de valeurs réelles de x répondant à $y = +\varepsilon$, $y = -\varepsilon$: $n + n'$ est pair *(Corollaire* II). Supposons que, pour $y = 0$, l'équation $F(x, y) = 0$ devienne $X = 0$ (²). Les racines réelles de cette nouvelle équation déterminent les points H, K,... situés sur X'X, à des distances finies de l'origine. Soit p le nombre de ces points, ou le nombre des racines réelles de $X = 0$. Comme on le voit à l'inspection de la figure, *ces racines sont les limites communes des racines réelles, soit de l'équation*

$$F(x, \varepsilon) = 0,$$

soit de l'équation

$$F(x, -\varepsilon) = 0,$$

qui ne croissent pas indéfiniment quand ε *tend vers zéro*. Le nombre de celles-ci est donc $2p$ (³). Conséquemment, *le nombre des points situés à l'infini est* $n + n' - 2p$.

Remarque. Le théorème peut encore être énoncé ainsi : *Dans toute courbe algébrique, le nombre des points situés à l'infini, sur la courbe et sur une asymptote quelconque, est nécessairement pair*.

E. Catalan.

(¹) Plusieurs Géomètres, très estimables d'ailleurs, admettent, *a priori*, que *l'asymptote, et une même branche de la courbe, ont* au moins *deux points communs, situés à l'infini*. Cette manière de voir ne me paraît pas acceptable. A plus forte raison ne saurais-je *croire* à l'*axiôme* suivant : « *on peut considérer une droite comme une courbe fermée, dans laquelle un point situé à l'infini forme la jonction des deux bras qui s'étendent dans les deux sens opposés* ; » ou à d'autres du même genre.

(²) On fait abstraction des valeurs infinies de x.

(³) Le point H est la limite commune de G et G' ; le point K est la limite commune de I et de L ; etc. On voit que la démonstration serait en défaut si la courbe considérée pouvait avoir des *points d'arrêt*. Aussi avons-nous commencé par établir qu'elle n'en a pas.