

Article

Sur les asymptotes des courbes algébriques.

in: Nouvelle correspondance mathématique | Nouvelle correspondance
mathématique - 1

Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library. Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions. Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek
Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Purchase a CD-ROM

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:

Niedersaechische Staats- und Universitaetsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen, Germany, Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

REMARQUE. — Le problème précédent dépend d'une équation de la forme

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)^2 = u^2, \quad (10)$$

où α, β, u doivent être rationnels. Comme nous avons posé $\alpha^2 + \beta^2 = 4, Z+y = \alpha x, Y+z = \beta x,$

les formules trouvées établissent, entre les arêtes du tétraèdre, cette nouvelle relation

$$(Z+y)^2 + (Y+z)^2 = 4x^2;$$

par conséquent, elles ne donnent pas toutes les solutions possibles.

Pour résoudre l'équation (10), Euler ⁽¹⁾ emploie les deux substitutions

$$\alpha = t(\beta-1) + 1, \quad \alpha = \frac{t\beta+1}{t+\beta},$$

t étant une indéterminée ; puis il ramène la question à rendre carré parfait un polynôme du quatrième degré en β .

J. NEUBERG.

SUR LES ASYMPTOTES DES COURBES ALGÈBRIQUES.

1. LEMME. Soit $F(x, \lambda) = 0$ une équation algébrique, du degré m par rapport à x . Soit, pour $\lambda = \alpha$, n le nombre des racines réelles : $m-n$ est un nombre pair.

En effet, $m-n$ est le nombre des valeurs imaginaires de x , répondant à $\lambda = \alpha$.

2. REMARQUE. L'énoncé et la démonstration supposent que le coefficient de x^m ne s'annule pas pour $\lambda = \alpha$. En outre, pour plus de simplicité, nous admettons que les valeurs réelles de x , répondant à $\lambda = \alpha$, sont *inégales*.

(1) Algèbre d'Euler, t. II, n° 238.

3. COROLLAIRE I. Si, pour $\lambda = \alpha, \alpha', \alpha'', \dots$, l'équation $F(x, \lambda) = 0$ a n, n', n'', \dots racines réelles, les nombres n, n', n'', \dots sont de même parité.

4. COROLLAIRE II. Si une courbe algébrique est rencontrée, en p, p', p'', \dots points, par des droites d, d', d'', \dots parallèles entre elles, les nombres p, p', p'', \dots sont de même parité.

5. COROLLAIRE III. Les courbes algébriques n'ont pas de point d'arrêt.

Supposons qu'un arc AB se termine brusquement en A. Menons, de part et d'autre du point d'arrêt A, deux parallèles d, d' , infiniment voisines de ce point. Si la droite d , qui coupe AB, a p points communs avec la courbe, la droite d' n'en a que $p-1$. Donc la courbe considérée n'est pas algébrique.

6. REMARQUE. Soit une ligne plane quelconque, trajectoire d'un point M qui s'arrête après être revenu à sa position initiale A ⁽¹⁾ : le nombre des points d'intersection de cette ligne avec une transversale quelconque, rectiligne ou curviligne, est pair.

En effet, si la transversale rencontre la courbe aux trois points A, B, C, par exemple ; les arcs AA', CC', situés de part et d'autre de la transversale, donnent lieu, en se réunissant, à un quatrième point d'intersection ⁽²⁾.

7. REMARQUE. La dernière proposition paraît en défaut dans ce problème, bien connu des écoliers : tracer, d'un seul coup de crayon, les côtés et l'une des diagonales d'un rectangle ABCD. Mais, si A est la position initiale du curseur, celui-ci, après avoir décrit la diagonale AC, doit, d'après l'hypothèse (6), revenir en A : cette condition entraîne la construction d'une nouvelle ligne CEA, allant de C en A.

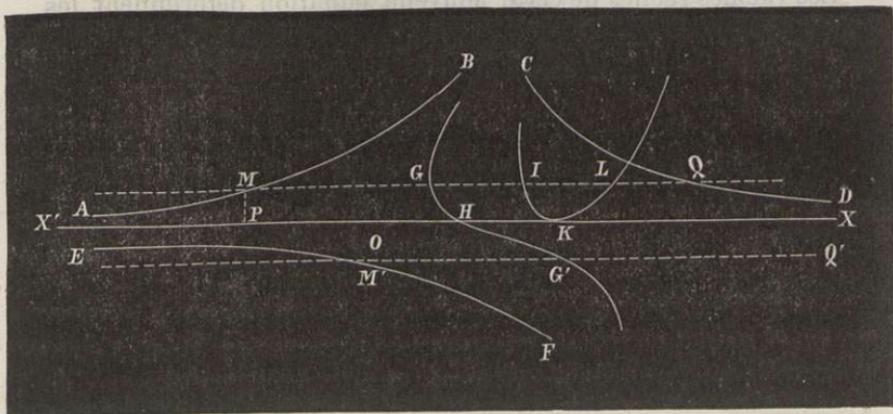
8. DES BRANCHES INFINIES. Si un point M, parti de la position A, décrit une ligne ABCD, de manière que la distance rectiligne AM puisse croître au-delà de toute limite, nous dirons que la trajectoire ABCD a une branche infinie.

⁽¹⁾ Cette ligne est un trait de plume, une toile d'araignée, etc.

⁽²⁾ Ce raisonnement est celui dont on fait usage pour établir, par la Géométrie, les théorèmes sur l'existence des racines réelles.

9. REMARQUE. D'après cette définition, un seul arc continu, indéfini dans les deux sens, est considéré comme composé de deux branches infinies. Par exemple, l'hyperbole ordinaire a quatre branches infinies ; la ligne droite a deux branches infinies ; etc. ⁽¹⁾.

10. THÉORÈME. Dans toute courbe algébrique, le nombre des branches infinies ⁽²⁾, asymptotiques à une même droite, est pair.



Soit $F(x, y) = 0$ l'équation de la courbe, rapportée à l'asymptote $X'OX$, prise comme axe des abscisses : $F(x, y)$ est un polynôme entier. Soient $y = \pm \varepsilon$ les équations de deux droites MQ , $M'Q'$, parallèles à $X'X$: ces transversales rencontrent la courbe en divers points $M, G, I, L, Q, \dots, M', G', \dots$. Soient M, Q, \dots, M', \dots les points qui s'éloignent indéfiniment de l'origine O et se rapprochent indéfiniment de $X'X$, lorsque ε tend vers zéro. Pour exprimer cette circonstance, nous dirons que les points M, Q, \dots, M' se transportent à l'infini, ou que chacune des branches

⁽¹⁾ Pour éviter toute confusion, on pourrait reprendre les dénominations de bras ou de rameaux, employées par les anciens Géomètres. C'est ce qu'a fait M. de La Gournerie : « chaque branche (infinie) est formée de deux BRAS... » (*Traité de Géométrie descriptive*, 91).

⁽²⁾ Ou plutôt : des bras.

infinies rencontre l'asymptote en un point situé à l'infini⁽¹⁾.

Cela posé, il s'agit de démontrer que le nombre des points M, Q, ... M', est pair.

Soient n , n' les nombres de valeurs réelles de x répondant à $y = +\varepsilon$, $y = -\varepsilon$: $n+n'$ est pair (Corollaire II). Supposons que, pour $y = 0$, l'équation $F(x, y) = 0$ devienne $X = 0$ ⁽²⁾. Les racines réelles de cette nouvelle équation déterminent les points H, K, ... situés sur X'X, à des distances finies de l'origine. Soit p le nombre de ces points, ou le nombre des racines réelles de $X = 0$. Comme on le voit à l'inspection de la figure, ces racines sont les limites communes des racines réelles, soit de l'équation

$$F(x, \varepsilon) = 0,$$

soit de l'équation

$$F(x, -\varepsilon) = 0,$$

qui ne croissent pas indéfiniment quand ε tend vers zéro. Le nombre de celles-ci est donc $2p$ ⁽³⁾. Conséquemment, le nombre des points situés à l'infini est $n+n' - 2p$.

REMARQUE. Le théorème peut encore être énoncé ainsi : Dans toute courbe algébrique, le nombre des points situés à l'infini, sur la courbe et sur une asymptote quelconque, est nécessairement pair.

E. CATALAN.

(1) Plusieurs Géomètres, très estimables d'ailleurs, admettent, a priori, que l'asymptote, et une même branche de la courbe, ont au moins deux points communs, situés à l'infini. Cette manière de voir ne me paraît pas acceptable. A plus forte raison ne saurais-je croire à l'axiome suivant : « on peut considérer une droite comme une courbe fermée, dans laquelle un point situé à l'infini forme la jonction des deux bras qui s'étendent dans les deux sens opposés ; » ou à d'autres du même genre.

(2) On fait abstraction des valeurs infinies de x .

(3) Le point H est la limite commune de G et G' ; le point K est la limite commune de I et de L ; etc. On voit que la démonstration serait en défaut si la courbe considérée pouvait avoir des points d'arrêt. Aussi avons-nous commencé par établir qu'elle n'en a pas.