

Article

Sur la formule du binome.

in: Nouvelle correspondance mathématique | Nouvelle correspondance  
mathématique - 1 | Principes de la théorie des déterminants. Sur deux  
problèmes de simon I...

## Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library. Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions. Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library. For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

### **Contact:**

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek  
Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

### **Purchase a CD-ROM**

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:  
Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum  
37070 Goettingen, Germany, Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

ordre déterminée par un cercle C et quatre points PABC, dont l'un d'eux, P, est à l'infini, dans une direction donnée :

Soient A', B', C' les seconds points d'intersection des sphères (CA), (CB), (CD) avec les rayons PA, PB, PC ; si l'on considère un point quelconque  $\mu$  du plan  $\pi$  déterminé par les points A', B', C' ; ce point est tel, que le second point de rencontre du rayon P $\mu$  avec la sphère (C $\mu$ ) est un point de la surface du second ordre.

Fontenay-le-Comte, le 25 décembre 1874.

SUR LA FORMULE DU BINOME ;

à propos d'une Note de M. JANNI (1).

I. De la relation connue

$$C_{n,p} + C_{n,p-1} = C_{n+1,p} \quad (2), \quad (1)$$

on conclut

$$\begin{aligned} C_{n-1,p-1} + C_{n-1,p-2} &= C_{n,p-1}, \\ C_{n-2,p-2} + C_{n-2,p-3} &= C_{n-1,p-2}, \\ &\dots \dots \dots \\ C_{n-p+1,1} + C_{n-p+1,0} &= C_{n-p+2,1}; \end{aligned}$$

puis, en ajoutant *membre à membre* toutes ces égalités :

$$C_{n,p} + C_{n-1,p-1} + \dots + C_{n-p+1,0} = C_{n+1,p}.$$

Soit  $n-p+1 = m$  ; d'où  $n = m+p-1$ . Renversant l'ordre des termes, on a

$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2} + \dots + \frac{m(m+1)\dots(m+p-1)}{1.2\dots p} \\ = \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+p)}{1.2\dots p} \end{aligned} \right\} (A)$$

(1) Journal de Battaglini, 1874.

(2) Cours d'Analyse, p. 40.

II. La relation (A), que nous venons de démontrer par la théorie des combinaisons, *subsiste pour toutes les valeurs de m*. En effet, l'égalité (1), d'où elle résulte, équivaut à l'identité

$$(n-p+1) + p = n+1.$$

III. Si l'on change  $m$  en  $-m$ , la formule (A) devient

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \dots \pm \frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1.2\dots p} \\ = \pm \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-p)}{1.2\dots p} \end{aligned} \right\} \text{(B)}$$

Celle-ci a été donnée par M. Janni.

IV. Le premier membre de l'égalité (A) représente la somme des  $p+1$  premiers termes du développement de  $(1-1)^m$ . De même, le premier membre de (B) est la somme des  $p+1$  premiers termes du développement de  $(1-1)^m$ . *Chacune de ces sommes est donc réductible à un monôme*. Au moyen de cette ingénieuse remarque, M. Janni a pu démontrer, plus simplement que je ne l'ai fait autrefois, les propositions suivantes :

1°  $m$  étant une quantité positive, moindre que l'unité, on a

$$\frac{1}{2^m} = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2} - \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} + \dots;$$

2°  $m$  étant une quantité positive quelconque, on a

$$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \dots;$$

3°  $m$  étant une quantité positive quelconque, on a

$$2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \dots \text{ (1)}.$$

(1) *Comptes rendus*, tome XLV, p. 621. — Le prince B. Boncompagni, aussi célèbre par son érudition que par sa libéralité scientifique, a eu l'extrême obligeance de m'envoyer une traduction française du petit Mémoire de M. Janni. Cette traduction, imprimée, commence ainsi :

« La série binomiale, dans le cas de  $x = -1$ , peut se réduire immédiatement à un produit infini. En effet, si on indique par S la somme de la série, on a

$$S = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \dots,$$



V. Les formules de sommation, (A), (B), dues à M. Janni, sont d'autant plus curieuses, qu'il n'en saurait exister d'analogue, croyons-nous, pour la somme des  $p+1$  termes du développement de  $(1+t)^m$ ,  $m$  étant positif. Soit, en effet,

$$S_{p+1} = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-p+1)}{1.2 \dots p}$$

D'après une formule de Poisson (1),

$$S_{p+1} = 2^m (p+1) \frac{m(m-1) \dots (m-p)}{1.2 \dots (p+1)} \int_0^1 \frac{t^{m-p-1} dt}{(1+t)^{m+1}};$$

ou, par le changement de  $t+1$  en  $z$ :

$$S_{p+1} = 2^m (p+1) \frac{m(m-1) \dots (m-p)}{1.2 \dots (p+1)} \int_1^{2^m} z^{-m-1} (z-1)^{m-p-1} dz.$$

Dans le cas le plus favorable, celui de  $m$  entier positif, l'intégrale se réduit à la différence de deux sommes, composées, chacune, de  $m-p$  termes; et la nouvelle expression de  $S_{p+1}$  est plus compliquée que la première.

VI. Quoiqu'il en soit, en égalant ces deux valeurs, on trouve la relation :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{p+1} \frac{2^{p+1}-1}{2^{p+1}} - \frac{1}{p+2} \frac{2^{p+2}-1}{2^{p+2}} C_{m-p+1,1} + \frac{1}{p+3} \frac{2^{p+3}-1}{2^{p+3}} C_{m-p+1,2} - \\ & \dots \pm \frac{1}{m} \frac{2^m-1}{2^m} \end{aligned} \right\} (C).$$

$$= \frac{1}{m \cdot 2^m} \frac{1.2.3 \dots p}{(m-1)(m-2) \dots (m-p)} [1 + C_{m,1} + C_{m,2} + \dots + C_{m,p}]$$

Par exemple,

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{15}{16} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot \frac{31}{32} = \frac{1}{5 \cdot 32} \cdot \frac{1.2}{4.3} [1+5+10].$$

E. CATALAN.

Que l'honorable auteur nous permette ici une légère critique. L'expression: *Somme d'une série*, est inadmissible, quand la convergence de la série n'est pas démontrée.

(1) *Bulletins de l'Académie de Belgique*, avril 1867.