ordre déterminée par un cercle C et quatre points PABC, dont l'un d'eux, P, est à l'infini, dans une direction donnée :

Soient A', B', C' *les seconds points d'intersection des sphères* (CA), (CB), (CD) *avec les rayons* PA, PB, PC ; *si l'on considère un point quelconque* μ *du plan* π *déterminé par les points* A', B', C'; *ce point est tel, que le second point de rencontre du rayon* $P\mu$ *avec la sphère* $(C\mu)$ *est un point de la surface du second ordre.*

Fontenay-le-Comte, le 25 décembre 1874.

SUR LA FORMULE DU BINOME ;

à propos d'une Note de M. JANNI [1].

—

I. De la relation connue

$$C_{n,p} + C_{n,p-1} = C_{n+1,p} \text{ [2]}, \qquad (1)$$

on conclut

$$C_{n-1,p-1} + C_{n-1,p-2} = C_{n,p-1},$$
$$C_{n-2,p-2} + C_{n-2,p-3} = C_{n-1,p-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_{n-p+1,1} + C_{n-p+1,0} = C_{n-p+2,1};$$

puis, en ajoutant *membre à membre* toutes ces égalités :

$$C_{n,p} + C_{n-1,p-1} + \ldots + C_{n-p+1,0} = C_{n+1,p}.$$

Soit $n-p+1 = m$; d'où $n=m+p-1$. Renversant l'ordre des termes, on a

$$\left.\begin{array}{l} 1+\dfrac{m}{1}+\dfrac{m(m+1)}{1.2}+\ldots+\dfrac{m(m+1)\ldots(m+p-1)}{1.2\ldots p} \\ \quad =\dfrac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p)}{1.2\ldots p}. \end{array}\right\} (A)$$

---

[1] *Journal de Battaglini*, 1874.

[2] *Cours d'Analyse*, p. 40.

II. *La relation* (A), que nous venons de démontrer par la théorie des combinaisons, *subsiste pour toutes les valeurs de* m. En effet, l'égalité (1), d'où elle résulte, équivaut à l'identité

$$(n-p+1)+p=n+1.$$

III. Si l'on change m en $-m$, la formule (A) devient

$$\left.\begin{aligned}1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}-\ldots\pm\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}\\ =\pm\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-p)}{1.2\ldots p}.\end{aligned}\right\}\text{(B)}$$

Celle-ci a été donnée par M. *Janni.*

IV. Le premier membre de l'égalité (A) représente la somme des $p+1$ premiers termes du développement de $(1-1)^{-m}$. De même, le premier membre de (B) est la somme des $p+1$ premiers termes du développement de $(1-1)^m$. *Chacune de ces sommes est donc réductible à un monôme.* Au moyen de cette ingénieuse remarque, M. Janni a pu démontrer, plus simplement que je ne l'ai fait autrefois, les propositions suivantes :

1° m *étant une quantité positive, moindre que l'unité, on a*

$$\frac{1}{2^m}=1-\frac{m}{1}+\frac{m(m+1)}{1.2}-\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}+\ldots;$$

2° m *étant une quantité positive quelconque, on a*

$$0=1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\ldots;$$

3° m *étant une quantité positive quelconque, on a*

$$2^m=1+\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\ldots\text{ (1)}.$$

---

(1) *Comptes rendus*, tome XLV, p. 621. — Le prince *B. Boncompagni*, aussi célèbre par son érudition que par sa libéralité scientifique, a eu l'extrême obligeance de m'envoyer une *traduction française* du petit Mémoire de M. Janni. Cette traduction, imprimée, commence ainsi :

« La série binomiale, dans le cas de $x=-1$, peut se réduire im-
« médiatement à un produit infini. En effet, si on indique par S la
« somme de la série, on a

$$\text{« }S=1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\ldots,$$

V. Les formules de sommation, (A), (B), dues à M. Janni, sont d'autant plus curieuses, qu'il n'en saurait exister d'analogue, croyons-nous, pour *la somme des* p+1 *termes du développement de* $(1+1)^m$, m *étant positif*. Soit, en effet,

$$S_{p+1} = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}.$$

D'après une formule de Poisson (1),

$$S_{p+1} = 2^m (p+1) \frac{m(m-1)\ldots(m-p)}{1.2\ldots(p+1)} \int_0^1 \frac{t^{m-p-1}\,dt}{(1+t)^{m+1}};$$

ou, par le changement de $t+1$ en z :

$$S_{p+1} = 2^m (p+1) \frac{m(m-1)\ldots(m-p)}{1.2\ldots(p+1)} \int_1^2 z^{-m-1}(z-1)^{m-p-1}dz.$$

Dans le cas le plus favorable, celui de m *entier positif*, l'intégrale se réduit à la différence de deux sommes, composées, chacune, de $m-p$ termes ; et la nouvelle expression de S_{p+1} est plus compliquée que la première.

VI. Quoiqu'il en soit, en égalant ces deux valeurs, on trouve la relation :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{p+1}\,\dfrac{2^{p+1}-1}{2^{p+1}} - \dfrac{1}{p+2}\,\dfrac{2^{p+2}-1}{2^{p+2}}\,C_{m-p+1,1} + \dfrac{1}{p+3}\,\dfrac{2^{p+3}-1}{2^{p+3}}\,C_{m-p+1,2} - \\ \qquad\qquad \ldots\ldots \pm \dfrac{1}{m}\,\dfrac{2^m-1}{2^m} \\ = \dfrac{1}{m.2^m}\,\dfrac{1.2.3.\ldots.p}{(m-1)(m-2)\ldots(m-p)}\,[1+C_{m,1}+C_{m,2}+\ldots+C_{m,p}] \end{array}\right\}(C).$$

Par exemple,

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8} - \frac{1}{4}\cdot\frac{15}{16}\cdot 2 + \frac{1}{5}\cdot\frac{31}{32} = \frac{1}{5.32}\cdot\frac{1.2}{4.3}\,[1+5+10].$$

E. CATALAN.

Que l'honorable auteur nous permette ici une légère critique. L'expression : *Somme d'une série*, est inadmissible, quand la convergence de la série n'est pas démontrée.

(1) *Bulletins de l'Académie de Belgique*, avril 1867.