II. Dans le *Mémoire sur la transformation des séries* (*), j'ai fait voir qu'en représentant par G la somme de cette série (**), on a

$$G=\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\,dx=-\int_0 \frac{1.\,x}{1+x^2}\,dx=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\,1.\,\frac{1+x}{1-x}$$

$$=2\int_0^1 \frac{\frac{1}{4}\pi-\operatorname{arc\,tg} x}{1-x^2}\,dx=2\int_0 \frac{1-x^3}{x(1+x)(1+x^2)}\operatorname{arc\,tg} x\,dx. \quad (1)$$

III. A ces formules, peu commodes pour le calcul numérique, on peut joindre celles-ci :

$$G=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}\,dx=\frac{\pi^2}{8}\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sin\frac{\pi}{2}x}=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,1.\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2 dx$$

$$=\int_0^\infty \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,x^2\,dx=\cdots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

qui ne le sont pas davantage.

IV. En transformant la série primitive, j'ai trouvé, par un long calcul,

$$G=0{,}915\ 965\ 594\ 177\ 21.$$

Question 311.

Trouver la courbe dans laquelle la partie de la perpendiculaire

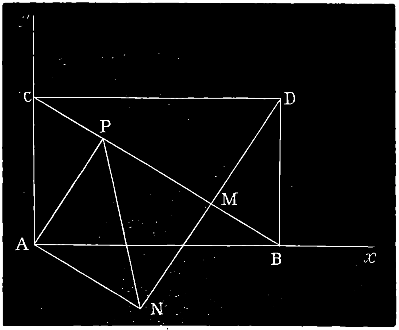
---

(*) *Académie de Belgique* (*Mémoires des savants étrangers*, t. XXXIII).

(**) La lettre G s'est présentée dans une suite alphabétique. Du reste, quelques-unes des intégrales définies considérées dans le travail cité, ont été trouvées par Legendre.

à l'extrémité du rayon vecteur, comprise entre les axes coordonnés, est de longueur constante. (Azzarelli.)

La solution de ce problème est si simple, qu'il suffit d'en indiquer les parties principales.



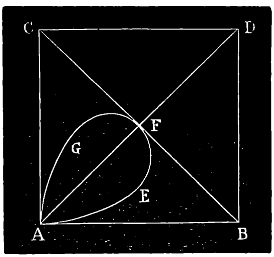
1° La perpendiculaire BC, au rayon vecteur AP, ayant une longueur constante, a, l'enveloppe de cette droite est une *hypocycloïde à quatre rebroussements* (*);

2° D'après une propriété connue, si l'on achève le rectangle ABCD, et que l'on projette D en M, sur BC, M est un point de l'hypocycloïde;

3° La courbe cherchée est la podaire de l'hypocycloïde, relativement à l'origine A;

4° Le rayon vecteur AP est moyen proportionnel entre BP et CP; donc l'équation demandée est

$$u = a \sin\omega \cos\omega; \quad \ldots \ldots \quad (1)$$



5° La normale, en P, est la diagonale PN du rectangle construit sur PA et PM;

6° La courbe se compose de quatre *pétales*, égaux entre eux, et tangents aux axes coordonnés : l'un d'eux est figuré ci-contre;

7° La longueur d'un arc AE est donnée par la formule

$$s = a \int_0^{\omega} d\omega \sqrt{\sin^2\omega \cos^2\omega + (\cos^2\omega - \sin^2\omega)^2},$$

(*) Voir, par exemple, le *Cours d'Analyse de l'Université de Liége*, seconde édition.

que l'on peut écrire ainsi :

$$s = a\int_0^{\omega} d\omega \sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\omega};$$

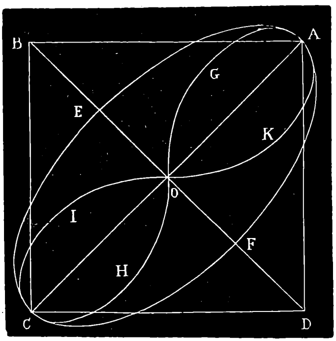
ou, si l'on fait $2\omega = \theta$:

$$s = \frac{a}{2}\int_0^{\theta} d\theta \sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2\theta}.$$

Ainsi, l'*arc* AE *a même longueur qu'un arc elliptique,* facile à construire : les axes de l'ellipse sont a et $\frac{a}{2}$;

8° En particulier,

$$\text{AEFG} = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\omega} = \frac{a}{2}\int_0^{\pi} d\theta \sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2\theta}.$$



D'après cette expression, si l'on construit le carré ABCD ayant a pour diagonale; que l'on prenne $\text{OE} = \text{OF} = \frac{a}{2}$; puis que l'on trace l'ellipse AECF et la *lemniscate* AGOHCIK, formée par deux des *pétales; ces deux courbes sont isopérimètres* (*).

(E. C.)

Question 336.

Dans le développement de $(1 \pm z)^{-\frac{q}{p}}$, p *étant premier, tous les coefficients sont réductibles à la forme* $\frac{N}{p^k}$. (E. C.)

(*) Pour ne pas compliquer la figure, on a supposé la lemniscate intérieure à l'ellipse : en réalité, les deux lignes ont six points communs (voir *N. C. M.*, t. IV, p. 155).