Les normales à un ellipsoïde le long d'une section parallèle à un plan principal s'appuient sur deux droites fixes (situées dans les deux autres plans principaux).

En voici une généralisation :

Deux ellipsoïdes E, E′ *ont un système de trois diamètres conjugués dirigés suivant les mêmes droites* OX, OY, OZ. *En un point* M, *on mène une droite* MN *parallèle au diamètre de* E′ *qui est conjugué avec le plan polaire de* M *par rapport à* E. *Lorsque* M *parcourt un plan* S, *parallèle à* OXY, MN *rencontre deux droites fixes.*

La démonstration analytique est des plus faciles. Si (x,y,z) sont les coordonnées de M, les équations de MN sont de la forme

$$\frac{X-x}{mx}=\frac{Y-y}{ny}=\frac{Z-z}{pz};$$

le point de rencontre avec le plan XZ est donné par

$$Y=0, \qquad \frac{Z-z}{pz}=-\frac{1}{n};$$

donc Z est constant, si z reste fixe.

On peut demander l'équation de la surface engendrée par la droite MN, et celle du cône directeur, lorsque M décrit une conique, dans le plan S. Les sections parallèles à S sont des coniques.

3. — Pour finir, voici une question que vous pourrez proposer.

Construire un hyperboloïde réglé, connaissant quatre points quelconques de la surface et un cône parallèle au cône asymptote.

Extrait d'une lettre de M. Catalan.

1. — Je reprends votre lettre du 10 février, relative à la *Cardioïde* et à la *Trisectrice*. Vous donnez :

1° Comme coordonnées d'un point M de la première courbe :

$$(1)\qquad x=\frac{R}{3}\frac{3-6t^2-t^4}{(1+t^2)^2}, \qquad y=\frac{8R}{3}\frac{t}{(1+t^2)^2};$$

2° Comme équation de la tangente T, en M :

$$(2)\qquad (1-3t^2)x+t(3-t^2)y=R(1+t^2);$$

3° Comme coordonnées du point M′ de la seconde courbe, correspondant à M (*) :

$$(3)\qquad x' = \mathrm{R}\frac{1 - 3t^2}{1 + t^2}, \qquad y' = \mathrm{R}\frac{t(3 - t^2)}{1 + t^2}.$$

2. — Afin de simplifier ces diverses formules, je pose

$$(4)\qquad t = \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\alpha.$$

De cette transformation (*archi*-connue), on tire :

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2t}{1 - t^2}, \qquad \cos\alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad \sin\alpha = \frac{2t}{1 + t^2},$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - 6t^2 + t^4}{(1 + t^2)^2}, \qquad \sin 2\alpha = \frac{4t(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2};$$

puis

$$(5)\qquad x = \frac{\mathrm{R}}{3}(2\cos\alpha + \cos 2\alpha), \quad y = \frac{\mathrm{R}}{3}(2\sin\alpha + \sin 2\alpha);$$

valeurs remarquables, sur lesquelles je reviendrai.

Quant à l'équation (2), elle se change en

$$(6)\quad \cos\frac{1}{2}\alpha\,(2\cos\alpha - 1)x + \sin\frac{1}{2}\alpha(2\cos\alpha + 1)y = \mathrm{R}\cos\frac{1}{2}\alpha.$$

3. — Celle-ci doit être vérifiée par la valeur (5). Donc :

1° On a, *identiquement*,

$$(7)\left\{\begin{aligned} &\cos\frac{1}{2}\alpha(2\cos\alpha - 1)(2\cos\alpha + \cos 2\alpha)\\ &+\sin\frac{1}{2}\alpha(2\cos\alpha + 1)(2\sin\alpha + \sin 2\alpha) = 3\cos\frac{1}{2}\alpha \quad (**);\end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\alpha = \frac{3 - (2\cos\alpha - 1)(2\cos\alpha + \cos 2\alpha)}{(2\cos\alpha + 1)(2\sin\alpha + \sin 2\alpha)};$$

relation curieuse

4. — La transformation précédente, appliquée aux formules (3), donne :

$$(9)\quad x' = \mathrm{R}(2\cos\alpha - 1), \qquad y' = \mathrm{R}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\alpha\,(2\cos\alpha + 1).$$

(*) M′ est le pôle de T.

(**) Le premier membre peut donc être *rendu calculable par logarithmes*.

En conséquence, $\cos\alpha = \dfrac{x' + R}{2R}$; et, par une combinaison simple,

(10) $$y'^2 \cot^2 \frac{1}{2}\alpha - x'^2 = 8R^2 \cos\alpha.$$

Or:

$$1 - \cos\alpha = \frac{R - x'}{2R}, \qquad 1 + \cos\alpha = \frac{3R + x'}{2R}.$$

Donc l'équation (10) devient

(11) $$y'^2 = (x' + 2R)^2 \frac{2R - x'}{3R + x'}.$$

Celle ci ne diffère pas de l'équation de la Trisectrice, que vous avez trouvée (*Note* de Prague (*), p. 603).

5. — Les formules (9) sont vérifiées par $\alpha = 0$, $y' = 0$, $x' = R$. Changeant x' en $X + R$, y' en Y, on a donc

(1) $$X = \frac{2}{3}R(1 + \cos\alpha)\cos\alpha, \quad Y = \frac{2}{3}R(1 + \cos\alpha)\sin\alpha;$$

puis, si l'on prend des coordonnées polaires :

$$u = \frac{2}{3}R(1 + \cos\omega);$$

ou, en posant $\frac{2}{3}R = a$:

$$u = a(1 + \cos\omega)$$

Cette équation, bien connue, représente un *Limaçon de Pascal.*

6. — Soient les circonférences ADOE, ACB, tangentes en A, et dont les diamètres sont $AO = a$, $AB = 2a$.

D'après l'équation (13), le *Limaçon* est la *podaire* de la grande circonférence, relativement au point A (**).

Donc, si l'on trace le rayon quelconque OC, et qu'on achève la construction indiquée, M est un point du *Limaçon*. De plus si l'on achève le rectangle ADOE; la normale en M, à la courbe sera ME.

(*) M. Catalan fait ici, allusion à une petite Note intitulée : *Rapprochement entre la trisectrice de Mac-Laurin et la cardioïde* que le professeur Dr Studnicka a eu l'obligeance de présenter, au mois d'octobre dernier, à la Société royale de Prague.

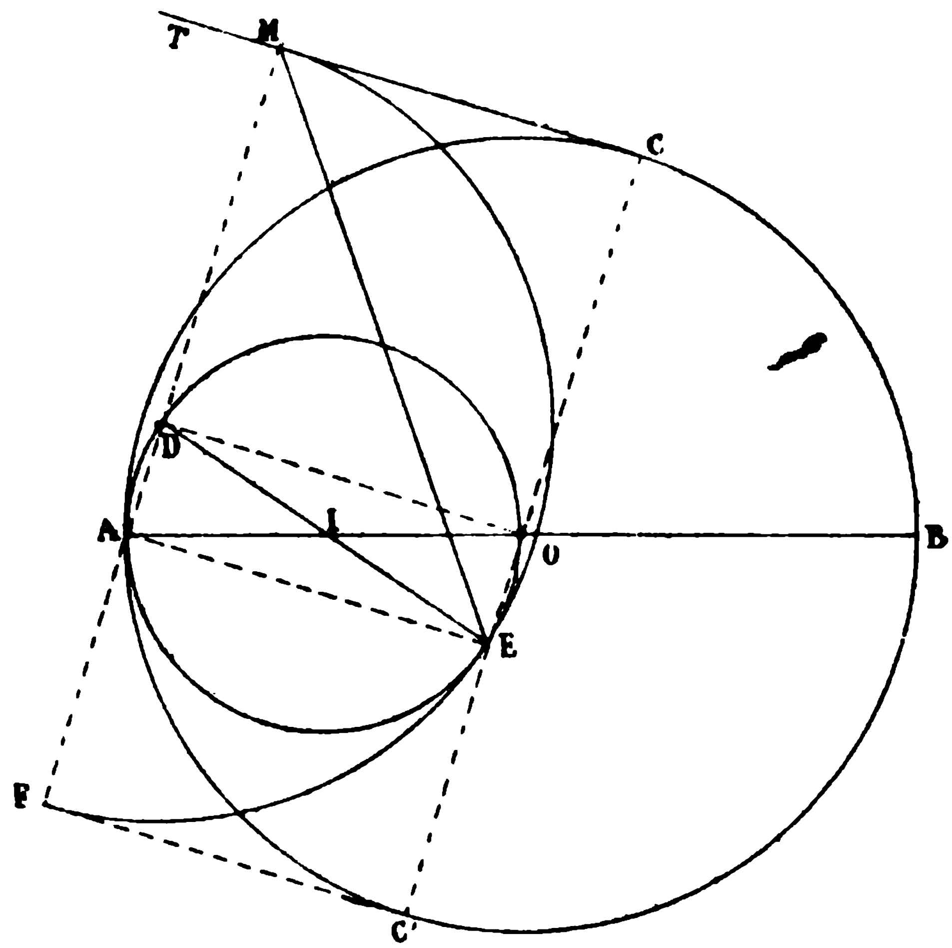
(**) Propriété classique.

7. — Traçons la diagonale DE. A cause de

$$DE = AO = OC = DM,$$

la demi-circonférence MEF, décrite du point D comme centre, avec a pour rayon, passe en M et en E. De plus, elle touche en E la circonférence ADOE. Et comme le triangle MDE est isocèle, on a, par le raisonnement connu :

arc FE = arc AE.



Nous pouvons donc énoncer ce petit théorème :

Soit la circonférence FLM *(égale à la circonférence* ACB*) roulant sur la circonférence fixe* ADOE. *Soit* F *le point de la circonférence mobile, d'abord placé en* A. *Cela posé, le point* M, *diamétralement opposé à F, decrit le* Limaçon de Pascal *considéré ci-dessus.*

8. — *Tout point* F, *d'une circonférence, est diamétralement opposé à un autre point* M, *de cette ligne.* Donc, en termes plus simples : *Quand une circonférence, dont le rayon est* a *roule sur une circonférence dont le rayon est* $\frac{a}{2}$, *de manière que celle-ci soit intérieure à l'autre; tout point de la grande circonférence décrit un limaçon de Pascal* (*).

(*) « *Toute courbe plane est une roulette* » (*Nouvelles Annales*, 1856, p. 103). Le Limaçon doit en être une. Mais, dans chaque cas particulier, la difficulté consiste à choisir, d'une manière simple, les éléments du problème. La construction précédente est une conséquence des formules :

$$AM = a(1 + \cos \omega), \qquad AE = a \sin \omega.$$