3° Lorsque $a$, $b$, $c$, vérifient la relation

$$c^r = a^p b^q.$$

$r$, $p$, $q$, désignant trois nombres tels que

$$r = p + q, \tag{1}$$

$k$ devient un nombre commensurable $\left(k = \dfrac{r}{q}\right)$ et la potentielle devient une courbe algébrique ayant pour équation

$$\gamma^{p+q} = \alpha^p \beta^q.$$

En particulier, quand $p = q = 1$, la potentielle, comme l'a observé M. Lemoine (A. F. *Nancy*, 1886) devient une conique.

Dans l'hypothèse contraire à l'égalité (1), $k$ est incommensurable et la potentielle est, alors, une courbe transcendante.

Dans le premier cas, elle est *unicursale;* dans le second, on peut dire qu'elle est du *genre unicursal* et, dans les deux cas, on peut la construire points par points.

4° La potentielle triangulaire passe par un grand nombre de points remarquables : centre de gravité, centre du cercle inscrit, point de Lemoine... et leurs réciproques d'ordre quelconque. *(A suivre.)*

## CORRESPONDANCE

*Extraits de plusieurs lettres de* M. Catalan.

... L'intéressante Note de M. d'Ocagne me suggère les remarques suivantes :

1° Les constructions de la normale à l'ellipse, indiquées par le jeune et ingénieux Géomètre, sont, peut-être, *moins commodes* que celle où l'on fait usage des foyers.

2° Quoiqu'il en soit, le premier théorème de la page 31 peut être énoncé ainsi :

M, M′ *étant deux points correspondants, sur l'ellipse* AB *et sur le cercle* AC (*); *si l'on trace les normales* MR M′R *à ces courbes; le lieu du point* R *est la circonférence décrite du point* O *comme centre, avec* a + b *pour rayon.*

3° Ce théorème, dû à M. d'Ocagne, peut être généralisé.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

*Soient deux ellipses ayant un axe commun. Soient, sur ces courbes,* M, M′ *deux points correspondants ; c'est-à-dire, ayant même projection sur l'axe commun. Soient, enfin,* MR, M′R *les normales respectives, en* M, M′. *Le lieu du point* R *est une ellipse dont les axes sont dirigés suivant les axes des courbes données* (*).

Autre chose :

Voici, à propos de séries, une proposition qui peut être utile.

*Soit une série*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (A)$$

*On supprime les termes* $u_\alpha$, $u_\beta$, $u_\gamma$..., *dont les indices vont en augmentant, et qui sont tels que la série auxiliaire*

$$u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \ldots$$

*soit convergente. Il reste*

$$u_1 + u_3 + \ldots + u_{\alpha-1} + u_{\alpha+1} + \ldots u_{\beta-1} + u_{\beta+1} + \ldots \qquad (B)$$

*Cela posé, les séries* (A), (B) *sont, simultanément, convergentes, divergentes ou indéterminées.*

*Application* : On demande si la série

$$\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) + \ldots$$

est convergente ou divergente.

Je supprime

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \ldots \text{ (série convergente).}$$

Il reste

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \ldots \text{ (série divergente).}$$

Donc la proposée est *divergente.*

*Autre application :*

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots \text{ (A) (**).}$$

---

(*) Les demi-axes de cette troisième ellipse sont déterminés par les formules

$$A = a + \frac{bb'}{a}, \qquad B = b + b'.$$

(**) Voici la loi des termes :

1° *Si* $n = 2^\alpha$, $u_n = \frac{1}{n}$;

2° *Si* n *est impair*, $u_n = \pm \frac{1}{n}$, *selon que* $n = 4\mu \pm 1$ ;

3° *Si* $n = 2^\alpha i$, i *étant impair*, $u_n = u_i$.

Je supprime

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2.$$

Il reste

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots \quad \text{(B)}.$$

Je supprime

$$-\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{24} - \dots = -\frac{2}{3}.$$

Il reste

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} - \frac{1}{15} + \dots \quad \text{(B')}.$$

Je supprime

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \dots = \frac{2}{5}, \text{ etc.}$$

Si l'on continue *indéfiniment* les suppressions, la limite des restes est zéro. Or, on a supprimé

$$2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Donc la série (A) est convergente, et a pour *somme* $\frac{\pi}{2}$.

Voici une question qui intéressera, peut-être, quelques-uns de vos lecteurs.

*Pour toute valeur réelle de* x,

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{(1+x)(1+x^2+x^4)} + \frac{x^3}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4+x^8)}$$
$$+ \frac{x^9}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8+x^{16})}$$
$$+ \frac{x^{21}}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}+x^{32})} + \dots \; (*).$$

Enfin, à propos de questions, en voici une que je crois très difficile à résoudre directement.

**Théorème.** — *La somme des fractions*

---

(*) Les exposants sont :
$0 = 3 - 3, \quad 3 = 6 - 3, \quad 9 = 12 - 3, \quad 21 = 24 - 3.$

$$(2n-1)\frac{2.3\ldots n}{3.5.7\ldots 2n+1},\qquad (2n-3)\frac{4.5\ldots n}{5.7\ldots 2n-1},$$

$$(2n-7)\frac{6.7\ldots n}{7.9\ldots 2n-3},\ \ldots,\ \textit{égale l'unité}.$$

N.-B. — D'après l'*origine* de ces fractions, la dernière est $\frac{1}{n+1}$ ou $3\frac{1}{n+2}$, selon que $n$ est *pair* ou *impair*.

Pour finir :

1° x *étant compris entre* 0 *et* 1, *on a*

$$\frac{1}{2.3\,(2+x)^2}+\frac{x^2}{4.5\,(2+x)^4}+\frac{x^4}{6.7\,(2+x)^6}+\ldots=$$

$$\frac{1}{2.3.4}-\frac{4x}{3.4.8}+\frac{11\,x^2}{4.5.16}-\frac{26\,x^3}{5.6.32}+\ldots$$

2° *Quand* x *surpasse l'unité, la première série reste convergente; mais la seconde devient divergente.*

3° *En conséquence, l'égalité ci-dessus,* vraie *dans le premier cas, est absurde dans le second.*

A-t-on remarqué ce genre de discontinuité ?

# BIBLIOGRAPHIE

*Histoire des sciences mathématiques et physiques*, par M. Maximilien Marie; répétiteur de mécanique, examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique; tome X, de Laplace à Fourier.

Le dixième volume de cette importante publication a pour sous-titre : de Laplace à Fourier. Il contient la fin de la treizième période, celle qui s'étend de Lagrange à Laplace et le développement de la quatorzième période. Celle-ci comprend, pour citer les noms les plus célèbres : Laplace, Legendre, Carnot, Ivory, Meusnier, Mascheroni, Simon Lhuillier. C'est à ce dernier géomètre qu'est dû, pour un triangle sphérique rectangle, le théorême exprimé par l'égalité :

$$\sin^2\frac{a}{2}=\sin^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2}+\sin^2\frac{c}{2}\cos^2\frac{b}{2}.$$

Cette relation, comme le fait observer M. Marie, est, dans la géométrie de la sphère, l'analogue du théorème de Pythagore, dans la géométrie plane; elle a été démontrée en 1810, dans les Annales de Gergonne. Nous la citons ici parce qu'elle nous semble constituer un exercice intéressant de trigonométrie sphérique ; mais elle n'est pas, bien entendu, autrement importante.

L'attention, dans la lecture du dixième volume de M. Marie, se portera