Soit (*), *sur le cercle principal qui a pour diamètre le grand axe d'une ellipse,* M′ *le point correspondant au point* M *de cette ellipse. Si l'on porte, sur le rayon* OM′, *la longueur* M′N′ *égale au demi-petit axe de l'ellipse, la droite* MN *est la normale en* M *à cette ellipse.*

Ce théorème se rattache à un ensemble de propriétés de l'ellipse qui fera l'objet d'un de mes prochains Mémoires.

Il conduit au mode suivant de description de l'ellipse par points et normales :

Soient (M″), (M′) *et* (N) *trois cercles concentriques, de rayons respectifs* b, a *et* a + b. *Par le centre commun de ces cercles, menons deux axes rectangulaires* Ox *et* Oy. *Un rayon pivotant autour du point* O *coupe ces cercles respectivement en* M″, M′ *et* N. *Soit* M *le point de rencontre des perpendiculaires menées à* Ox *par* M′ *et à* Oy *par* M″. *Le point* M *décrit l'ellipse qui a pour demi-axes* OA = a *et* OB = b, *et* MN *est normale à cette ellipse.*

DÉMONSTRATION

D'UN THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE

Par M. **E. Catalan**, Professeur émérite à l'Université de Liège (**).

1. — Dans un des derniers numéros de la *Revue scientifique* (18 septembre), M. Delbœuf, le savant Professeur à l'Université de Liège, donne, sans démonstration, un curieux *théorème sur la divisibilité des nombres*, que l'on peut énoncer ainsi :

Soit un nombre entier N, *décomposé en deux parties* aa′, bb′ *telles que les facteurs* a, b *soient premiers entre eux, et que les facteurs* a′, b′ *soient, aussi, premiers entre eux.*

Soient, d'autre part, six nombres entiers, A, A′, B, B′, x, x', *satisfaisant aux conditions :*

$$\mathrm{A}a + \mathrm{B}b = \mathrm{N}x,\quad \mathrm{A}'a' + \mathrm{B}'b' = \mathrm{N}x'.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

(**) Extrait de la *Revue Scientifique*, du 16 octobre 1886.

Cela posé, on a

$$AA' + BB' = \mathfrak{M}(N).$$

Des équations

$$aa' + bb' = N, \quad Aa + Bb = Nx,$$

on déduit:

$$a(A - a'x) + b(B - b'x = o.$$

Donc

$$A = a'x + b\theta, \quad B = b'x - a\theta; \qquad (1)$$

θ étant un entier quelconque, positif ou négatif.

De même,

$$A' = ax' + b'\theta', \quad B' = bx' - a'\theta'. \qquad (2)$$

Par conséquent,

$$AA' + BB' = N(xx' + \theta\theta'). \qquad (3)$$

2. — Remarque. Si $N = f^2 + g^2$, prenons $x' = x$, $\theta' = \theta$. L'égalité (3) devient

$$AA' + BB' = (f^2 + g^2)(x^2 + \theta^2),$$

ou
$$AA' + BB' = (fx \pm g\theta)^2 + (f\theta \pm gx)^2. \qquad (4)$$

Ainsi, dans ce cas particulier, *la quantité* $AA' + BB'$, *multiple de* N, *est une somme de deux carrés.*

3. — *Exemple.* $N = 73$, $a = 3$, $b = 2$, $a' = 5$, $b' = 29$, $x = 7$.

On trouve:

$$A = 21 + 29\theta, \quad B = 14 - 5\theta, \quad A = 35 + 2\theta, \quad B = 203 - 3\theta;$$

puis

$$AA' + BB' = 73(7^2 + \theta^2) = (56 \pm 3\theta)^2 + (21 \mp 8\theta)^2.$$

LES CARRÉS MAGIQUES DE FERMAT

RESTAURÉS ET PUBLIÉS SUR DES DOCUMENTS ORIGINAUX ET INÉDITS

Par M. Ed. **Lucas**.

(*Suite et fin*, voir 2me série, 9me année, p. 176.)

L'addition d'équidifférences.

Reprenons la table d'addition de seize nombres; nous supposerons a, b, c, d, et p, q, r, s, rangés dans l'ordre croissant et de plus

$$b + p < a + q,$$